Igloo

Dans un milieu enneigé, trois explorateurs construisent autour d'eux un igloo de rayon intérieur $R = 1$ m et d'épaisseur $e = 30$ cm. La température extérieure est de $T_{ext} = -7$ °C et l'igloo subit des échanges thermiques conducto-convectifs (coefficient h) avec l'air extérieur et l'air intérieur à l'igloo. On envisage deux cas : en pleine tempête et par temps calme.

Données :

- Coefficient conducto-convectif intérieur par tempête $h_{ext} = 100$ W·m^{-2}·K^{-1}
- Coefficient conducto-convectif extérieur par temps calme $h_{ext} = 8$ W·m^{-2}·K^{-1}
- Coefficient conducto-convectif intérieur $h_{int} = 5$ W·m^{-2}·K^{-1}
- Conductivité thermique de la glace $\lambda = 2$ W·m^{-1}·K^{-1}
- Chaque explorateur irradie une puissance thermique $\mathcal{P} = 80$ W

1) Calculer la résistance thermique totale de l'igloo.

2) Déterminer l'expression puis calculer la température dans l'igloo.

3) L'igloo fond-t-il ? Dans ce cas, déterminer l'épaisseur de la couche de glace qui va se transformer en eau (en supposant que l'eau ne s'écoule pas).

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) On se place en régime permanent. On modélise l'igloo par une demi-sphère. On néglige la conduction thermique par le sol.

Puisque l'on est en régime permanent, le flux thermique est constant, égal au flux produit dans l'igloo.

$$\phi = 3\mathcal{P}$$

Par symétrie du système, le vecteur densité surfacique de flux ne dépend que de r et est dirigé selon $\overrightarrow{e}_r$. L'intégrale suivante porte sur une demi-sphère de rayon $r \in [R; R+e]$.

$$\phi = \iint \overrightarrow{j}_{th}(r) \cdot \overrightarrow{dS} = j_{th}(r)\ 2\pi r^2$$

On en déduit, par la loi de Fourier :

$$-2\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} = \phi \quad \Rightarrow \quad -\frac{\phi}{2\pi\lambda}\frac{dr}{r^2} = dT$$

On en déduit le profil de température dans la glace ($R_{ext} = R + e$) :

$$\boxed{T(r) = T(R_{ext}) + \frac{\phi}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{ext}}\right)}$$

On en déduit la résistance thermique :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T(R) - T(R_{ext})}{\phi} = \frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+e}\right) = 18,4 \cdot 10^{-3}\ \text{K·W}^{-1}}$$

2) L'air extérieur impose : $T\left(R_{ext}^+\right) = T_{ext} = -7$ °C. Le flux conducto-convectif sur la paroi extérieure donne alors :

$$\phi = 3\mathcal{P} = 2\pi\,(R+e)^2\, h_{ext}\left(T\left(R_{ext}^-\right) - T\left(R_{ext}^+\right)\right)$$

Ainsi,

$$T\left(R_{ext}^-\right) = T_{ext} + \frac{3\mathcal{P}}{2\pi\,(R+e)^2\, h_{ext}} = \begin{cases} -6.77\ \text{°C} & \text{(tempête)} \\ -4.74\ \text{°C} & \text{(calme)} \end{cases}$$

On en déduit la température en R dans la glace.

$$T\left(R^+\right) = T\left(R_{ext}^-\right) + 3\mathcal{P} \cdot R_{th} = \begin{cases} -2.37\ \text{°C} & \text{(tempête)} \\ 0.23\ \text{°C} & \text{(calme)} \end{cases}$$

Le flux conducto-convectif sur la paroi intérieure donne alors :

$$\phi = 3\mathcal{P} = 2\pi R^2 h_{int}\left(T\left(R^-\right) - T\left(R^+\right)\right)$$

Ainsi,

$$T_{int} = T\left(R^-\right) = T\left(R^+\right) + \frac{3\mathcal{P}}{2\pi R^2 h_{int}} = \begin{cases} 5.27\ \text{°C} & \text{(tempête)} \\ 7.87\ \text{°C} & \text{(calme)} \end{cases}$$

3) L'igloo fond en cas de temps calme, car $T(R^+) > 0$.

Étant donné la température de 0.23 °C, on peut penser que le rayon où la température s'annule est proche de R. Déterminons l'épaisseur e_0 où la température s'annule, en supposant que l'eau liquide ait les mêmes propriétés que la glace.

$$0\ \text{°C} = T\left(R_{ext}^-\right) + \frac{3\mathcal{P}}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R+e_0} - \frac{1}{R+e}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e_0 = 1,23\ \text{cm}}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com