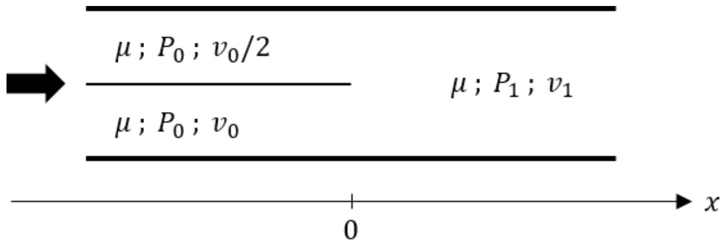
Homogénéisation d'un écoulement

Une canalisation cylindrique d'axe horizontal x et de section S est partagée jusqu'en $x = 0$ en deux canalisations de section $S/2$ dans lesquelles un même fluide de masse volumique μ s'écoule avec des vitesses uniformes et stationnaires $\overrightarrow{v}_0$ et $\overrightarrow{v}_0/2$. Les deux écoulements se rejoignent en $x = 0$ et suffisamment loin de $x = 0$, l'écoulement est uniforme et stationnaire de vitesse $\overrightarrow{v}_1$. On note P_0 la valeur commune de la pression avant la jonction et P_1 la pression loin après la jonction.



1) Quel phénomène physique est à l'origine de l'homogénéisation des vitesses pour $x > 0$?

2) Établir les expressions de v_1 et P_1 en fonction de v_0, P_0 et μ.

3) Faire un bilan énergétique. Commenter.

Correction

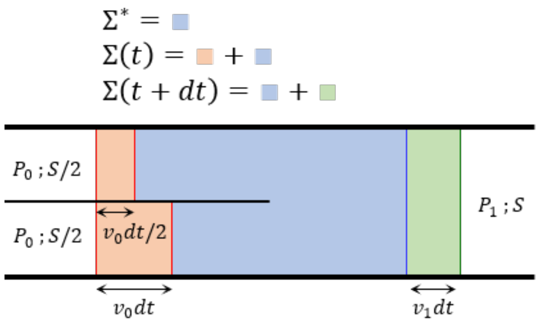
Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Il s'agit de la viscosité du fluide.
2) Écoulement stationnaire donc conservation du débit massique :

$$\mu S v_1 = \mu \frac{S}{2} v_0 + \mu \frac{S}{2}\frac{v_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = \frac{3v_0}{4}}$$

On fait un bilan de quantité de mouvement (projeté directement sur x) sur le système fermé décrit ci-dessous. On indique par $*$ la partie commune au système à t et $t+dt$.



$$\frac{dp}{dt} = \sum f_P \quad \Rightarrow \quad \frac{p(t+dt) - p(t)}{dt} = P_0 \frac{S}{2} + P_0 \frac{S}{2} - P_1 S$$

Or :

$$\begin{cases} p(t+dt) = p^* + \mu \times S v_1 dt \times v_1 \\ p(t) = p^* + \mu \times \dfrac{S}{2} v_0 dt \times v_0 + \mu \times \dfrac{S}{2}\dfrac{v_0}{2} dt \times \dfrac{v_0}{2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$P_0 - P_1 = \mu \left(v_1^2 - \frac{v_0^2}{2} - \frac{v_0^2}{8} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_1 = P_0 + \frac{\mu v_0^2}{16}}$$

3) Bilan d'énergie cinétique sur le même système donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}$$

Or :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_c(t+dt) = \mathcal{E}_c^* + \dfrac{1}{2}\mu \times S v_1 dt \times v_1^2 \\ \mathcal{E}_c(t) = \mathcal{E}_c^* + \dfrac{1}{2}\mu \times \dfrac{S}{2} v_0^2 dt \times v_0 + \dfrac{1}{2}\mu \times \dfrac{S}{2}\dfrac{v_0}{2} dt \times \left(\dfrac{v_0}{2}\right)^2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu S}{2} \left(v_1^3 - \frac{v_0^3}{2} - \frac{v_0^3}{16} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = -\frac{9\mu S v_0^3}{128} < 0}$$

La puissance des forces intérieures est négative, donc il s'agit bien d'une dissipation d'énergie.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com