Guide d'ondes

Une cavité vide, supposée invariante par translation selon $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$, est taillée dans un conducteur occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > a$. On souhaite utiliser cette cavité comme guide d'onde : on s'intéresse à la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique sous la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = f(x)\ e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_y}$$

1) Déterminer $f(x)$ et la relation entre ω et k.

2) Montrer que l'onde ne peut se propager que si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c à exprimer.

3) On appelle modes propagatifs du guide les différentes ondes pouvant se propager dans le guide pour une pulsation donnée. Pour quel intervalle de pulsation le guide d'onde est-il monomode, c'est-à-dire qu'il n'y existe qu'un seul mode propagatif ? Même question pour un guide multimode, c'est-à-dire possédant plusieurs modes propagatifs ?

Le champ magnétique dans le guide s'écrit :

$$\underline{\overrightarrow{B}}(M,t) = -\frac{kE_0}{\omega}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_x} + \frac{in\pi E_0}{a\omega}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_z}$$

4) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting instantané et interpréter physiquement chacune de ses composantes.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) L'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\Delta\underline{\overrightarrow{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

L'onde doit respecter les conditions aux limites en $x = 0$ et a, données par la nullité du champ à l'interface avec le conducteur, ce qui impose :

$$f(x=0) = f(x=a) = 0$$

On injecte donc la forme d'onde recherchée dans l'équation de d'Alembert, et on obtient :

$$f''(x)\ e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_y} - k^2\ f(x)\ e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_y} + \frac{\omega^2}{c^2}\ f(x)\ e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{0}$$

Ainsi :

$$f''(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f(x) = 0$$

La nature des solutions de cette équation différentielle dépend du signe du coefficient $\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2$, qui doit être forcément positif : s'il était négatif (resp. nul), la solution serait une somme d'exponentielles (resp. une fonction affine), qui ne peut pas s'annuler deux fois. On a donc :

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad\Rightarrow\quad f(x) = A\cos(Kx) + B\sin(Kx)$$

La condition limite en $x = 0$ impose :

$$f(x=0) = A = 0$$

La condition limite en $x = a$ impose :

$$f(x=a) = B\sin(Ka) = 0 \quad\Rightarrow\quad Ka = n\pi \quad\Rightarrow\quad K = \frac{n\pi}{a}$$

Enfin, en notant E_0 l'amplitude de l'onde électrique, on a donc :

$$\boxed{f(x) = E_0\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{avec :} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

La relation de dispersion dans le guide dépend donc de l'entier n et s'écrit

$$\boxed{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad \text{avec :} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

2) La relation précédente peut se réécrire sous la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

Pour qu'il y ait propagation, il faut que k soit réel donc k^2 positif, ce qui impose d'avoir

$$\frac{\omega^2}{c^2} > \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \omega > \frac{n\pi c}{a}$$

La plus petite valeur de pulsation pour laquelle l'onde peut se propager dans le guide est celle pour $n = 1$, soit

$$\boxed{\omega > \omega_c = \frac{\pi c}{a}}$$

3) Le guide est monomode pour les pulsations pour lesquelles seul le mode $n = 1$ peut se propager, alors que le mode $n = 2$ ne peut pas donner lieu à de la propagation, c'est-à-dire :

$$\boxed{\omega_c < \omega < 2\omega_c}$$

Il est multimode pour toutes les pulsations supérieures à $\omega > 2\omega_c$.

4) Le calcul du vecteur de Poynting instantané (et non pas moyenné) impose de revenir aux champs réels,

$$\overrightarrow{E} = \mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}}\right) = E_0\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_y}$$

et

$$\overrightarrow{B} = \mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{B}}\right) = -\frac{kE_0}{\omega}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_x} - \frac{n\pi E_0}{a\omega}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_z}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Pi} &= \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\\ &= \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_z}\\ &\quad -\frac{n\pi E_0^2}{a\omega\mu_0}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

Après simplification du dernier terme, il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_z} - \frac{n\pi E_0^2}{4a\omega\mu_0}\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\sin(2\omega t - 2kz)\,\overrightarrow{u_x}}$$

Le premier terme, dirigé par $\overrightarrow{u_z}$, est de moyenne non nulle : il traduit physiquement le fait que l'onde transporte de l'énergie dans sa direction de propagation, ce qui est bien le but du guide d'onde. On constate par ailleurs que ce transport d'énergie est inhomogène au sein du guide, et en particulier nul sur les bords ($x = 0$ et a). Le second terme, porté par $\overrightarrow{u_x}$, est de moyenne nulle. Il traduit qualitativement des oscillations d'énergie d'un bord à l'autre du guide d'onde.