Guide d'onde

Entre deux conducteurs plans parfaits situés en $x = 0$ et $x = a$, règne un champ électrique :

$$\overrightarrow{E}(x) = E_0\, f(x)\ \cos(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_y}$$

On considère qu'il y a un vide parfait entre les deux plaques. On rappelle qu'il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique au passage d'une interface.

1) Donnez les caractéristiques du champ.

2) Donnez les équations de Maxwell entre les plaques et déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{E}(x)$.

On pose :

$$K^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$$

3) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(x)$.

4) Donnez les conditions aux limites de $f(x)$. Résoudre l'équation différentielle, en supposant que $K^2 > 0$ et avec E_0 l'amplitude du champ électrique.

5) Montrer qu'il faut nécessairement avoir $\omega > \omega_c$ (à déterminer) pour avoir propagation.

6) Calculez la vitesse de phase et celle de groupe.

Correction

Correction

1) Il s'agit d'une onde non plane (si $f(x) \neq cte$), progressive selon les z croissants ($\omega t - kz$), harmonique (un seul ω), transverse ($\overrightarrow{E}(x) \perp \overrightarrow{u_z}$).

2) Équations de Maxwell dans le vide :

$$\boxed{\text{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = 0} \quad \boxed{\text{div}\left(\overrightarrow{B}\right) = 0} \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}} \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}}$$

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) &= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) - \Delta \overrightarrow{E} = -\Delta \overrightarrow{E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}}$$

3) On injecte le champ donné dans l'équation différentielle. Après simplification par $E_0 \cos(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_y}$, il vient :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - k^2\, f(x) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\, f(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} + K^2\, f(x) = 0}$$

4) Le champ électrique est nulle dans un conducteur parfait et il y a continuité de la composante électrique au niveau de chaque plaque. On en déduit :

$$\boxed{f(x=0) = f(x=a) = 0}$$

La solution de l'équation différentielle est :

$$f(x) = A\cos(Kx) + B\sin(Kx)$$

Les conditions aux limites imposent :

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B\sin(Ka) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_n = \frac{n\pi}{a} \quad \text{avec :} \quad n \in \mathbb{N}$$

Enfin, l'amplitude du champ doit être E_0, donc $B = 1$. Ainsi,

$$\boxed{f(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

5) Pour avoir propagation, il faut nécessairement que :

$$k^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 - K_n^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n > cK_n = \frac{n\pi c}{a}$$

Il y a au moins propagation du premier mode ($n = 1$) si :

$$\boxed{\omega > \omega_c = \frac{\pi c}{a}}$$

6) On écrit :

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

La vitesse de phase vaut :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}}$$

De plus, la différentielle de la relation de dispersion donne :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$