Gravity

Dans le film Gravity (2013), des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_T = 6400$ km.

1) Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.

2) En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de G, m, M_0 et R, le rayon de l'orbite.

3) Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_H = 97$ min. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance R_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance R_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

4) Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.

5) Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de G, M_0, m, R_H et R_S.

6) Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de R_H, T_H et R_S. Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périgée en fonction de R_S, T_S et R_H. Calculer les valeurs numériques.

7) Quelle est la durée de ce voyage?

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Force gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{mM_0}{r^2}\,\overrightarrow{u}_r$$

On en déduit l'énergie potentielle associée :

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{mM_0}{r^2}\,\overrightarrow{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\,\overrightarrow{u}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p = -G\frac{mM_0}{r}}$$

2) Trajectoire circulaire uniforme :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_r \\ \overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{u}_\theta = v_0\overrightarrow{u}_\theta \\ \overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{u}_r = -\dfrac{v_0^2}{R}\overrightarrow{u}_r \end{cases}$$

On applique le PFD ur la masse m :

$$-mR\omega^2\overrightarrow{u}_r = -G\frac{mM_0}{R^2}\,\overrightarrow{u}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{R^3 = \frac{GM_0}{\omega^2} = \frac{GM_0}{4\pi^2}T^2}$$

Le carré de la période est proportionnel au cube du rayon de l'orbite circulaire.
L'énergie mécanique vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_0}{R}$$

Or, d'après le PFD :

$$-m\frac{v_0^2}{R}\overrightarrow{u}_r = -G\frac{mM_0}{R^2}\,\overrightarrow{u}_r \quad \Rightarrow \quad mv_0^2 = G\frac{mM_0}{R}$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -G\frac{mM_0}{2R}}$$

3) <u>Attention</u> : dans toute la suite, on notera $r_S = 400$ km et $r_H = 600$ km les distances entre les orbites de l'ISS / de Hubble et la surface de la Terre ; mais on notera $R_S = 6800$ km et $R_H = 7000$ km les distances entre les orbites de l'ISS / de Hubble et le centre de la Terre.

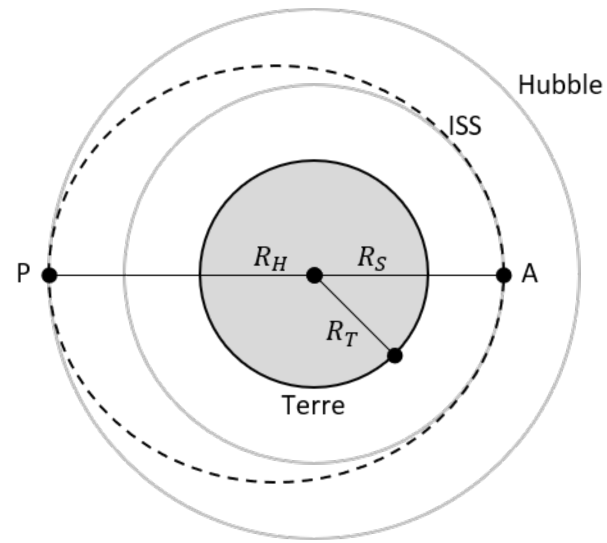
D'après la troisième loi de Kepler,

$$\frac{T_S^2}{R_S^3} = \frac{T_H^2}{R_H^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_S = T_H\left(\frac{R_S}{R_H}\right)^{3/2} = 53 \text{ min}}$$

De plus,

$$\boxed{v_H = \frac{2\pi R_H}{T_H} = 7,6 \text{ km·s}^{-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_S = \frac{2\pi R_S}{T_S} = 7,7 \text{ km·s}^{-1}}$$

4)



5) L'énergie mécanique pour une orbite elliptique est la même que pour une orbite circulaire en remplaçant R par a (demi-grand axe de ellipse). Ici : $2a = R_H + R_S$.
On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -G\frac{mM_0}{R_H + R_S}}$$

6) L'énergie mécanique à l'apogée s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_{apo}^2 - G\frac{mM_0}{R_H} = -G\frac{mM_0}{R_H + R_S} \quad \Rightarrow \quad v_{apo} = \sqrt{\frac{2GM_0R_S}{R_H\left(R_H + R_S\right)}}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Faisons disparaître G de l'équation, car il n'est pas donné dans l'énoncé. On se sert de la troisième loi de Kepler.

$$\boxed{v_{apo} = \sqrt{\frac{2R_S}{R_H\left(R_H+R_S\right)} \times \frac{4\pi^2 R_H^3}{T_H^2}} = 7,5\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Il en va de même pour le périgée :

$$\boxed{v_{per} = \sqrt{\frac{2R_H}{R_S\left(R_H+R_S\right)} \times \frac{4\pi^2 R_S^3}{T_S^2}} = 7,7\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$$

7) On utilise la troisième loi de Kepler sur l'ellipse.

$$\left(\frac{R_H+R_S}{2}\right)^3 = \frac{GM_0}{4\pi^2} T_{ellipse}^2$$

On en déduit le temps de trajet (une demi-période).

$$\boxed{T_{trans.} = \frac{T_{ellipse}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R_H+R_S}{2}\right)^3 \times \frac{4\pi^2}{GM_0}} = 47\ \text{min}}$$