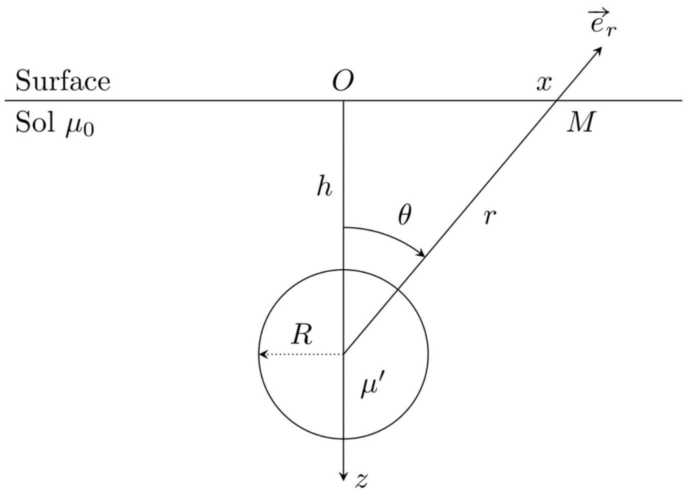
Gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre, pour détecter des cavités, pour suivre le niveau des nappes phréatiques, etc.

Nous allons dans un premier temps étudier l'anomalie gravimétrique due à un corps sphérique de masse volumique μ' situé dans un sol homogène de masse volumique μ_0 avant de conseiller des brigands en quête d'une cachette pour leur or.



1) Par une application du théorème de Gauss gravitationnel, établir l'expression du champ de gravitation $\vec{g}$ en un point M situé à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R et de masse volumique μ_0.

Dans la suite, on note $\vec{g}_0 = \vec{g}(M \in \text{surface})$.

2) Notons $x = OM$ la distance entre le point M et le point O de la surface placé à la verticale du corps sphérique (cf. schéma). Déterminer la composante verticale $g'_z(x)$ du champ gravitationnel créé par la cavité en fonction de h et x seulement.

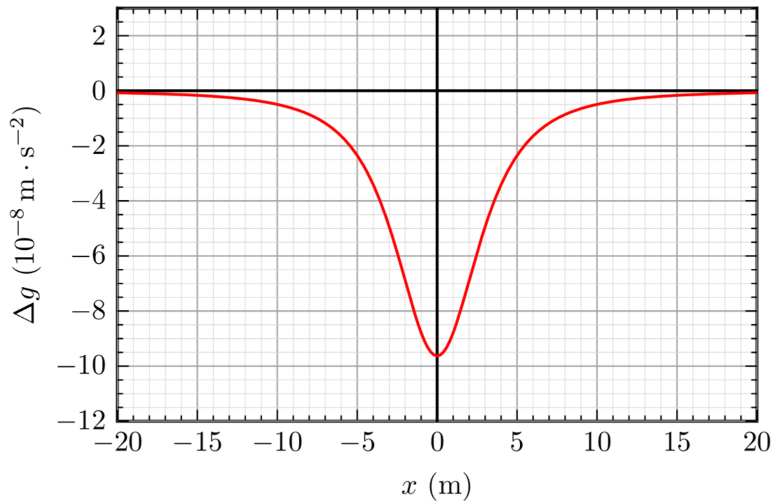
3) Montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_z - g_0$ vaut :

$$\Delta g(x) = \frac{4}{3}\pi G\, \Delta\mu\, \frac{hR^3}{(h^2+x^2)^{3/2}} \quad \text{avec :} \quad \Delta\mu_0 = \mu' - \mu_0$$

4) Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale Δg_{max} ? À quelle abscisse x_0 est-elle mesurée ? La largeur à mi-hauteur Δx de la courbe d'anomalie gravimétrique est définie par $\Delta g(x_0 \pm \Delta x) = \Delta g_{max}/2$. Montrer que $\Delta x \propto h$.

5) Tracer sur une même figure l'allure de la courbe $\Delta g(x)$ pour deux sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 = 2h_1$. On supposera $\Delta\mu_0 > 0$, et on veillera à mettre en évidence l'influence de h_1 et h_2 sur ces tracés.

6) Des brigands très forts en physique souhaitent cacher de l'or en le dissimulant dans une grotte sphérique. Ils mesurent la courbe d'anomalie gravimétrique suivante. Déterminer le rayon R de la grotte et la profondeur h à laquelle elle se trouve.



7) Terrifiés à l'idée de tomber sur des soldats du roi qui seraient eux aussi très forts en physique, les brigands souhaitent que la grotte et l'or qui y est caché soient indétectables par analyse gravimétrique. Cela est-il possible ? Si oui, quelle masse d'or les brigands doivent-ils cacher ? La grotte est-elle assez grande pour la contenir ?

Données :

- Constante de gravitation universelle $\quad G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}
- Rayon de la Terre $\quad R_0 = 6,37 \cdot 10^3$ km
- Masse de la Terre $\quad M_0 = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg
- Masse volumique de l'or $\quad \mu_{or} = 1,93 \cdot 10^4$ kg·m^{-3}

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) La distribution de masse est invariante par rotation selon les angles θ et φ. Donc : $\overrightarrow{g}(M) = \overrightarrow{g}(r)$.
Les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi})$ sont deux plans de symétrie de la distribution de masse. Donc $\overrightarrow{g}$ appartient à l'intersection de ces deux plans. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{g}(M) = g(r)\,\overrightarrow{u_r}}$$

On applique le théorème de théorème de Gauss gravitationnel sur une sphère de centre O et de rayon r.

$$\oiint \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi G\, M_{int}$$

Puisque l'intégrale porte sur les variables θ et φ, le champ $\overrightarrow{g}(r)$ est constant et peut sortir de l'intégrale. Ainsi :

$$g(r) \times S = -4\pi G\, M_{int} \quad \text{avec :} \quad S = 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad M_{int} = \mu_0 \frac{4}{3}\pi R^3$$

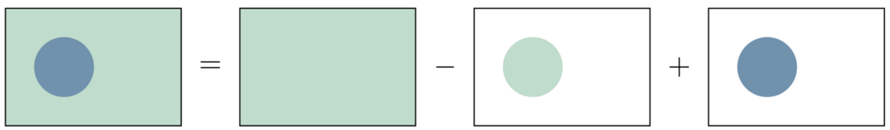
On en déduit :

$$\boxed{g(r) = -\frac{4\pi\mu_0 G R^3}{3r^2}}$$

2) On peut utiliser la relation précédente (champ à l'extérieur d'un corps sphérique). On projette cette relation sur l'axe z : $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_z} = -\cos(\theta) = -\dfrac{h}{r}$ et on utilise le théorème de Pythagore : $r = \sqrt{h^2 + x^2}$. On a donc :

$$g'_z(x) = \frac{4\pi\mu' G h R^3}{3r^3} = \boxed{\frac{4\pi\mu' G h R^3}{3\left(h^2 + x^2\right)^{3/2}}}$$

3) La distribution de masse en présence de la cavité peut s'interpréter comme la superposition de trois distributions : la Terre homogène de masse volumique μ_0, à laquelle on a retiré une sphère de masse volumique μ_0 qui « vide » la zone où se trouve le corps sphérique et enfin le corps sphérique lui-même de masse volumique μ'.



Par le théorème de superposition (directement projeté sur z), le champ gravitationnel total est la somme des champs gravitationnels créés par ces trois distributions, soit :

$$g_z(M) = g_0 - \left[\frac{4\pi\mu_0 G h R^3}{3\left(h^2 + x^2\right)^{3/2}}\right] + \left[\frac{4\pi\mu' G h R^3}{3\left(h^2 + x^2\right)^{3/2}}\right]$$

On en déduit bien :

$$\boxed{\Delta g(x) = g_z(M) - g_0 = \frac{4}{3}\pi G\, \Delta\mu\, \frac{hR^3}{\left(h^2 + x^2\right)^{3/2}}}$$

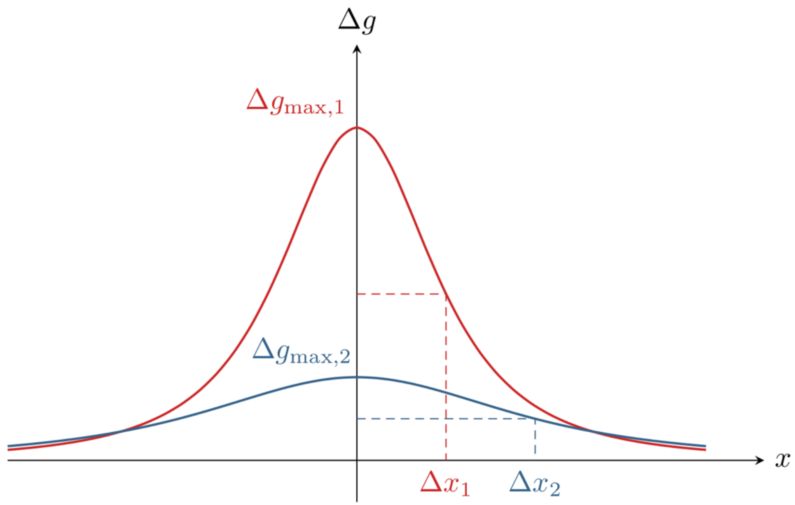
4) L'anomalie gravimétrique maximale est observée à la verticale du corps sphérique, en $x_0 = 0$. Elle vaut :

$$\boxed{\Delta g_{max} = \frac{4}{3}\pi G\, \Delta\mu\, \frac{R^3}{h^2}}$$

Exprimons la largeur à mi-hauteur Δx,

$$\begin{aligned}
\Delta g(\Delta x) = \frac{\Delta g_{max}}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi G\, \Delta\mu\, \frac{hR^3}{\left(h^2 + \Delta x^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi G\, \Delta\mu\, \frac{R^3}{h^2} \\
&\Rightarrow \quad \left(h^2 + \Delta x^2\right)^{3/2} = 2h^3 \\
&\Rightarrow \quad h^2 + \Delta x^2 = 2^{2/3} h^2 \\
&\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = h\sqrt{2^{2/3} - 1}}
\end{aligned}$$

5)



6) On lit graphiquement :

$$\Delta g_{max} = -9,5 \cdot 10^{-8}\ \text{m·s}^{-2} \quad \text{et} \quad \Delta x = 3,3\ \text{m}$$

On en déduit :

$$\boxed{h = \frac{\Delta x}{\sqrt{2^{2/3} - 1}} \simeq 4\ \text{m}}$$

La grotte étant vide, on a ici $\Delta\mu = -\mu_0$, d'où :

$$\Delta g_{max} = -\frac{4}{3}\pi G \mu_0 \, \frac{R^3}{h^2} = -\frac{M_0 G R^3}{h^2 R_0^3}$$

Ainsi :

$$\boxed{R = R_0 \left(\frac{|\Delta g_{max}| \, h^2}{M_0 G} \right)^{1/3} \simeq 1\ \text{m}}$$

7) La grotte et l'or qui y est caché sont indétectables si l'anomalie gravimétrique due à l'or (positive car il est plus dense que le sol) compense exactement l'anomalie gravimétrique (négative) due à la grotte. Pour cela, il faut d'abord que l'or soit stocké dans une sphère située au centre de la grotte. En généralisant l'équation de l'anomalie gravimétrique totale vaut :

$$\Delta g(x) = \frac{4}{3}\pi G \left(\mu_{or} R_{or}^3 - \mu_0 R^3 \right) \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

Elle est donc partout nulle si :

$$\boxed{\mu_{or} R_{or}^3 = \mu_0 R^3}$$

La masse d'or à cacher dans la grotte vaut donc :

$$\boxed{m_{or} = \frac{4}{3}\pi \mu_{or} R_{or}^3 = \frac{4}{3}\pi \mu_0 R^3 = 2,3 \cdot 10^4\ \text{kg}}$$

Un kg d'or coûtant environ $55\,000$ €, j'espère pour les brigands qu'ils sont très riches. En tout cas, ils n'auront pas de problème de place : comme $\mu_{or} > \mu_0$, alors $R_{or} < R$.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com