Fréquences propres d'une sphère rigide

On cherche à étudier les modes propres de vibration à l'intérieur d'une sphère rigide de rayon R. On écrit la surpression sous la forme :

$$\underline{P_1}(r,t) = \frac{A}{r}\, e^{i(\omega t - kr)} + \frac{B}{r}\, e^{i(\omega t + kr)}$$

1) Justifier cette expression et écrire le champ des vitesses correspondant.

2) Quelles sont les conditions aux limites ?

3) En déduire l'équation vérifiée par les fréquences propres (établir une équation portant sur k).

4) Indiquer comment déterminer graphiquement les solutions. En déduire une expression approchée des fréquences propres f_n.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) On est dans une sphère, il est donc normal d'avoir des ondes sphériques (amplitude $\propto 1/r$). L'onde de pression s'écrit comme la superposition d'une onde se propageant vers l'extérieur ($-ikr$) et d'une onde se propageant vers l'intérieur ($+ikr$).

Linéarisation de l'équation d'Euler :

$$\mu\left[\frac{\partial \underline{\overrightarrow{v}}}{\partial t}+\left(\underline{\overrightarrow{v}}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\underline{\overrightarrow{v}}\right]=-\overrightarrow{\text{grad}}(P) \quad\Rightarrow\quad \mu_0 i\omega\underline{\overrightarrow{v}_1}=-\frac{\partial \underline{P_1}}{\partial r}$$

On a donc :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{v}_1}(r,t)=\frac{1}{i\mu_0\omega r^2}\left[\underline{A}\,(1+ikr)\,e^{i(\omega t-kr)}+\underline{B}\,(1-ikr)\,e^{i(\omega t+kr)}\right]\overrightarrow{u_r}}$$

2) En $r=0$, la vitesse ne peut pas diverger. En $r=R$, la vitesse s'annule car la sphère est rigide.

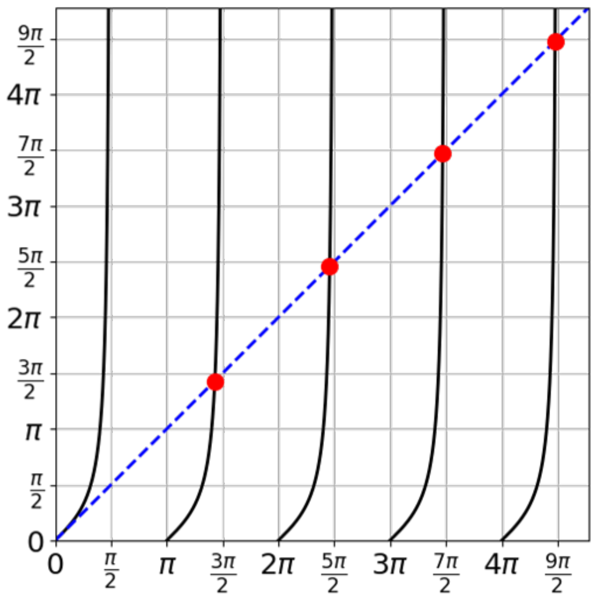
3) La condition en $r=0$ donne : $\boxed{\underline{A}+\underline{B}=0}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{v}_1}(r,t) &= \frac{\underline{A}}{i\mu_0\omega r^2}\Big[-2i\sin(kr)+2ikr\cos(kr)\Big]e^{i\omega t}\overrightarrow{u_r}\\ &= \frac{2\underline{A}}{\mu_0\omega r^2}\Big[-\sin(kr)+kr\cos(kr)\Big]e^{i\omega t}\overrightarrow{u_r}\end{aligned}$$

La condition en $r=R$ donne :

$$-\sin(kR)+kR\cos(kR)=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\tan(kR)=kR \quad \text{avec :} \quad k=\frac{\omega}{c}}$$

4) Résolution graphique: il s'agit des points d'intersections des courbes $x\mapsto x$ et $x\mapsto\tan(x)$.



Les courbes se croisent presque au niveau de l'asymptote de la fonction tangente (très bonne approximation dès la deuxième solution). Ainsi :

$$k_n=\frac{2\pi f_n}{c}\simeq\frac{(2n+1)\,\pi}{2R} \quad\Rightarrow\quad \boxed{f_n\simeq\frac{(2n+1)\,c}{4R} \quad \text{avec :} \quad n\in\mathbb{N}^*}$$