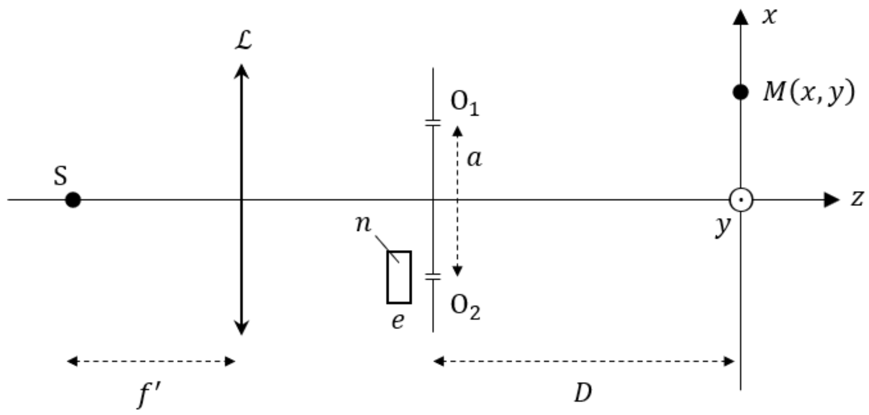
Frange achromatique

On considère le dispositif des fentes d'Young en lumière monochromatique avec observation à une distance $D \gg a$, la source étant placée au foyer objet d'une lentille $\mathcal{L}$.



1) Établir l'expression de l'intensité $I(x)$ sur l'écran (sans la lame de verre pour l'instant). Déterminer l'expression de l'interfrange.

2) Une lame de verre d'épaisseur e, d'indice n, est placée devant l'une des fentes. Déterminer la nouvelle position x_0 de la frange d'ordre 0.

On remplace désormais la source monochromatique par une source de lumière blanche. L'indice du verre varie avec la longueur d'onde dans le vide selon la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

avec A et B des constantes. On appelle frange achromatique celle pour laquelle :

$$\frac{d\Delta\phi}{d\lambda} = 0$$

où $\Delta\phi$ le déphasage entre les deux rayons.

3) Déterminer la position x_1 de la frange achromatique. Exprimer l'écart $\Delta x = x_1 - x_0$.

Correction

Correction

1) D'après la formule de Fresnel :

$$I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)\right)$$

Détermination de la différence de marche δ.

$$\delta = (O_2M) - (O_1M)$$

avec :

$$\begin{aligned}(O_2M) &= \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2+D^2}\\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2}\\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}(O_1M) &= \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2+D^2}\\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2}\\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]\end{aligned}$$

Après simplification :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

Ainsi :

$$\boxed{I(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right)}$$

On en déduit l'interfrange, la période de $I(x)$:

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

2) Cette lame modifie la différence de marche. On a cette fois :

$$\boxed{\delta = \Big[(O_2M)+ne\Big] - \Big[(O_1M)+e\Big] = e\,(n-1)+\frac{ax}{D}}$$

La nouvelle position de la frange d'ordre 0 est :

$$\delta = 0 \quad\Rightarrow\quad e\,(n-1)+\frac{ax_0}{D} = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_0 = -\frac{eD\,(n-1)}{a}}$$

3) Par définition de la frange achromatique :

$$\frac{d\Delta\phi}{d\lambda} = 2\pi\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) = 2\pi\,\frac{\delta'\lambda-\delta}{\lambda^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d\delta}{d\lambda}\lambda = \delta$$

En utilisant la loi de Cauchy, il vient :

$$-\frac{eB}{\lambda^2} = e\left(A+\frac{B}{\lambda^2}-1\right)+\frac{ax_1}{D} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1 = -\frac{eD}{a}\left(A+\frac{2B}{\lambda^2}-1\right)}$$

On en déduit :

$$\boxed{\Delta x = x_1 - x_0 = -\frac{eDB}{a\lambda^2}}$$