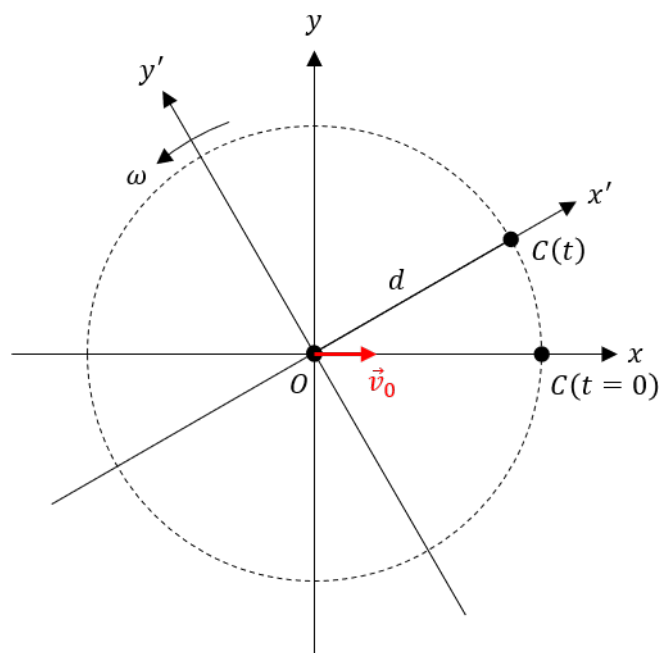


## Expérience du manège inertiel

Si vous allez à la cité des Sciences, vous pourrez monter dans un manège inertiel. Lorsque l'on est entré, les portes se reforment et le manège (référentiel  $\mathcal{R}'$ ) se met en mouvement par rapport au référentiel terrestre (référentiel  $\mathcal{R}$ ), selon un mouvement de rotation autour d'un axe vertical ( $Oz$ ), à la vitesse angulaire constante  $\omega$ .

L'une des expériences consiste à se placer au centre  $O$  du manège et à essayer d'atteindre une cible  $C$  liée au manège tournant, située en face de soi à l'instant initial, à une distance  $d$  du centre, avec une balle en mousse. Le lancé est horizontal et le temps de l'expérience suffisamment court pour que l'on puisse négliger le poids de la balle. Le mouvement a donc lieu dans le plan horizontal.



On se place dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

1) Lors du premier lancé, le tireur lance la balle à la vitesse  $v_0$  en direction ( $Ox$ ) de la cible :  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ . Décrire la nature de la trajectoire. Est-ce que la balle atteint la cible ? Est-ce que son point d'impact est à gauche ou à droite ?

2) Lors du deuxième lancé, le tireur veut tirer plus fort pour atteindre la cible. À-t-il raison ? Comment évolue le point d'impact ?

3) Exprimer le temps  $\tau$  mis par la balle pour atteindre la périphérie du manège.

Dans toute la suite, on se place dans  $\mathcal{R}'$ .

4) Retrouver le résultat de la première question. Qu'en est-il de la deuxième ?

5) Établir les équations différentielles du mouvement.

6) Montrer que :

$$\begin{cases} x'(t) = v_0 t \cos(\omega t) \\ y'(t) = -v_0 t \sin(\omega t) \end{cases}$$

est la solution de ces équations.

7) Déterminer le temps  $\tau$  mis par la balle pour atteindre le cercle extérieur de rayon  $d$ . Conclure.

8) En déduire l'angle que doit faire le tireur avec l'axe ( $Ox$ ) pour que la balle touche la cible.



Correction

## Correction

1) Le poids est négligé, tout comme les frottements de l'air. La balle ne subit aucune force, elle suit donc une trajectoire rectiligne uniforme.

La balle part donc en ligne droite selon l'axe  $(Ox)$ , mais l'axe  $(Ox')$  et donc la cible tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ . La balle rate à coup sûr la cible et atterrit à droite (vue du lanceur).

2) Il tire plus fort, le manège a donc moins le temps de tourner. Il rate toujours sa cible mais le point d'impact est plus proche de cette dernière.

3) Le mouvement est rectiligne uniforme :

$$\tau = \frac{d}{v_0}$$

4) La force d'inertie d'entraînement est axifuge, elle ne dévie donc pas la trajectoire. C'est la force d'inertie de Coriolis qui va dévier la balle.

$$\vec{f}_{ie} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

En particulier, à l'instant initial :

$$\vec{f}_{ie}(t=0) = -2m\omega\vec{u}_z \wedge v_0\vec{u}_x = -2m\omega v_0\vec{u}_y$$

La force est dirigée selon  $-\vec{u}_y$ , la balle est donc déviée vers la droite.

Si  $v_0$  augmente, la force de Coriolis gagne en intensité donc l'accélération de la balle vers la droite est plus importante. En revanche, comme le temps de l'expérience est plus court, on ne peut pas conclure si la balle arrivera plus proche au plus loin de la cible comparé au premier lancé.

5) Vitesse et accélération de la balle dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}$$

Bilan des forces : force d'inertie d'entraînement et force de Coriolis. Le PFD sur la balle donne :

$$m\vec{a} = m\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Ainsi,

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}$$

On en déduit les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x}' = \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' = \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' \\ \ddot{z}' = 0 \end{cases}$$

6) Pour répondre à la question, il suffit d'injecter les solutions dans l'équation différentielle et vérifier que ça marche. On dérive pour avoir la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x}' = v_0 \cos(\omega t) - v_0 \omega t \sin(\omega t) \\ \dot{y}' = -v_0 \sin(\omega t) - v_0 \omega t \cos(\omega t) \end{cases}$$

Puis l'accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x}' = -2v_0\omega \sin(\omega t) - v_0\omega^2 t \cos(\omega t) \\ \ddot{y}' = -2v_0\omega \cos(\omega t) + v_0\omega^2 t \sin(\omega t) \end{cases}$$

Et on remarque que l'on a bien :

$$\begin{cases} \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' = -2v_0\omega \sin(\omega t) - v_0\omega^2 t \cos(\omega t) = \ddot{x}' \\ \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' = -2v_0\omega \cos(\omega t) + v_0\omega^2 t \sin(\omega t) = \ddot{y}' \end{cases}$$

Remarque : méthode « classique » pour résoudre ce genre d'équation différentielle.

On pose :

$$u = x' + iy' \quad \text{avec : } i^2 = -1$$

Ainsi,

$$\dot{u} = \dot{x}' + i\dot{y}' \quad \text{et} \quad \ddot{u} = \ddot{x}' + i\ddot{y}'$$

Avec l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' + i(\omega^2 y' - 2\omega \dot{x}') \\ &= \omega^2 (x' + iy') - 2i\omega (\dot{x}' + i\dot{y}') \\ &= \omega^2 u - 2i\omega \dot{u} \end{aligned}$$

On en déduit l'équation différentielle sur  $u$  :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2i\omega \frac{du}{dt} - \omega^2 u = 0$$

Polynôme caractéristique :

$$r^2 + 2i\omega r - \omega^2 = (r + i\omega)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -i\omega$$

Il existe une seule racine double. Donc la solution de l'ED s'écrit :

$$u(t) = (At + B) e^{-i\omega t} \quad \text{avec : } A, B \in \mathbb{C}$$

Avec les conditions initiales :

$$u(0) = 0 = B \quad \text{et} \quad \dot{u}(0) = v_0 = A$$

Ainsi :

$$u(t) = v_0 t e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = \operatorname{Re}(u) = v_0 t \cos(\omega t) \\ y(t) = \operatorname{Im}(u) = -v_0 t \sin(\omega t) \end{cases}$$

7) Pour atteindre le cercle de rayon  $d$  :

$$d = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = v_0 \tau \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = v_0 \tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{d}{v_0}}$$

On retrouve (évidemment) le même résultat qu'à la Q3.

8) Le point d'impact est :

$$\begin{cases} x'_C(t) = d \cos\left(\frac{\omega d}{v_0}\right) \\ y'_C(t) = -d \sin\left(\frac{\omega d}{v_0}\right) \end{cases}$$

Il s'agit d'un point situé à une distance  $d$  du centre et faisant un angle  $\alpha = -\frac{\omega d}{v_0}$  avec l'axe  $(Ox')$ . Autrement dit, on a dévié d'un angle  $|\alpha|$  vers la droite. Pour atteindre la cible, il faut donc tirer avec un angle  $|\alpha|$  vers la gauche de l'axe  $(Ox)$ .