Expérience de Jean Perrin

1) Établir la formule du nivellement barométrique pour un gaz parfait à l'équilibre thermique et mécanique contenu dans un cylindre de base S et de hauteur h.

2) Donner la valeur de la hauteur d'échelle H dans le cas de l'atmosphère isotherme ($T = 293$ K) en rappelant les hypothèses de ce modèle.

3) Exprimer la probabilité $dp(z)$ pour une molécule de se trouver entre z et $z + dz$.

Dans son livre Les atomes publié en 1913, Jean Perrin décrit une expérience qui lui a permis de mesurer le nombre d'Avogadro. Il prépare une suspension dans l'eau de grains de gomme-gutte sphériques ayant tous le même rayon a (de l'ordre du dixième de micromètre). Il observe ces grains au microscope, l'échantillon étant contenu dans une cuve de 100 µm de profondeur. La gomme-gutte est une substance solide de densité $d = 1,194$. La température est $T = 293$ K. Chaque grain est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède.

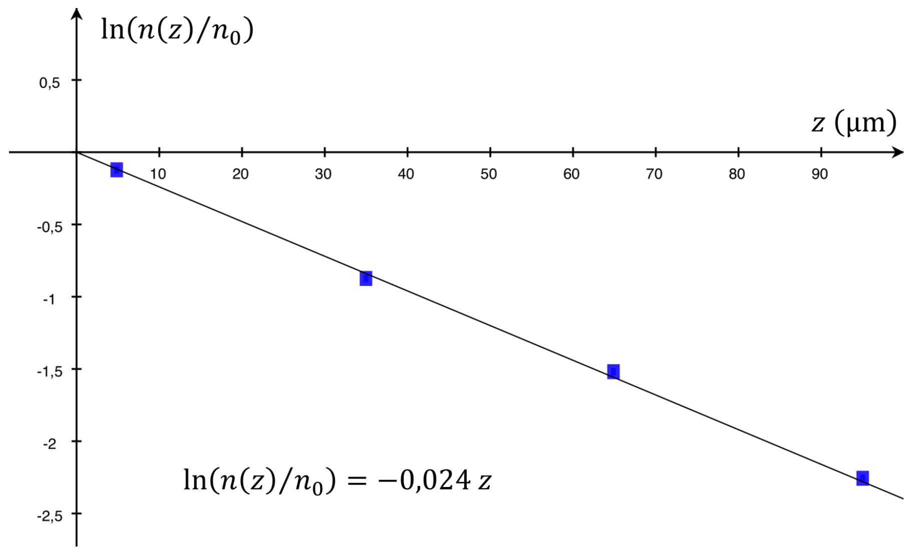
4) Montrer que l'énergie potentielle d'un grain de coordonnée z le long d'un axe (Oz) vertical ascendant est de la forme $\mathcal{E}_p(z) = Az$. On exprimera A en fonction de g, d, a et ρ (masse volumique de l'eau).

5) Avec l'hypothèse que les grains suivent la loi de Boltzmann, donner l'expression de la longueur H qui caractérise la répartition des grains selon l'axe (Oz).

6) Faire l'application numérique. Commentaire en lien avec la question 2. On donne $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K^{-1}.

Les mesures de concentration entre quatre plans horizontaux équidistants ont donné les résultats reportés sur le graphe donné au dos : (n_0 est la concentration particulaire à l'altitude $z = 0$).

7) En déduire une évaluation du nombre d'Avogadro sachant que $a = 0,212$ µm. Commentaire.



Correction

Correction

1) Système : tranche d'épaisseur dz. On fait un PFD à l'équilibre par unité de surface, que l'on projette selon $\overrightarrow{u}_z$.

$$0 = P(z) - P(z+dz) - \rho g dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}$$

On obtient l'équation fondamental de l'hydrostatique.

Équation d'état des gaz parfait (volumique) :

$$P = \frac{n}{V}\, RT = \frac{m}{VM}\, RT = \frac{\rho}{M}\, RT \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT}\, P$$

Sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{dP}{dz} + \frac{P}{H} = 0 \quad \text{avec :} \quad H = \frac{RT}{Mg}}$$

Solution :

$$\boxed{P(z) = P_0\, e^{-z/H}}$$

Formule du nivellement barométrique.

2) Hypothèses :

- l'air est un GP ;
- équilibre mécanique (pas de vent) ;
- température uniforme (isotherme...) ;
- g uniforme.

AN :

$$\boxed{H = \frac{RT}{Mg} = 8,0 \text{ km}}$$

3) Nombre moyen de particules entre z et $z + dz$:

$$dN = \mathcal{N}_a\, dn = \frac{\mathcal{N}_a \rho S dz}{M} = \frac{\mathcal{N}_a \rho_0 S}{M}\, e^{-z/H}\, dz$$

Nombre moyen total de particules dans un cylindre de hauteur h :

$$N = \int_0^h dN = \frac{\mathcal{N}_a \rho_0 S}{M} \left(1 - e^{-h/H}\right)$$

La probabilité de se trouver entre z et $z + dz$ est le rapport des deux quantités précédente.

$$\boxed{dp = \frac{dN}{N} = \frac{e^{-z/H}}{1 - e^{-h/H}}\, dz}$$

On peut également faire apparaître le facteur de Boltzmann :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} \propto e^{-z/H} = e^{-(mgz)/(MgH/\mathcal{N}_a)} = e^{-\mathcal{E}_{pp}/k_B T}}$$

4) La masse volumique des particules vaut : $\rho_p = \rho d$ (par définition de la densité).

Poids (projeté selon $\overrightarrow{u}_z$) :

$$P = -mg = -\frac{4\pi a^3}{3}\, \rho g d$$

Poussée d'Archimède :

$$\Pi = \frac{4\pi a^3}{3}\, \rho g$$

On en déduit la force totale que subie une particule :

$$F = \frac{4\pi a^3}{3}\, \rho g\, (1 - d)$$

et donc l'énergie potentielle associée :

$$F = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dz} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p = \underbrace{\frac{4\pi a^3}{3}\, \rho g\, (d-1)}_{=A}\, z}$$

5) On identifie l'équation précédente avec le facteur de Boltzmann (cf. Q3) :

$$e^{-\mathcal{E}_p/k_B T} = e^{-z/H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{k_B T}{A} = \frac{3 k_B T}{4\pi a^3 \rho g\, (d-1)}}$$

6) Avec : $a \sim 0,1$ µm, on trouve :

$$\boxed{H \sim 500 \text{ µm}}$$

Il s'agit du même ordre de grandeur que la cuve, il sera donc possible d'observer la statistique de distribution au microscope.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

7) On sait que :

$$P(z) = P_0\, e^{-z/H} \quad \Rightarrow \quad n(z) = n_0\, e^{-z/H} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{n(z)}{n_0}\right) = -\frac{z}{H}$$

On en déduit à l'aide de la régression :

$$H = \frac{1}{0,024\ \mu\text{m}^{-1}} = 41,67\ \mu\text{m}$$

On en déduit :

$$H = \frac{3RT/\mathcal{N}_a}{4\pi a^3 \rho\,(d-1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{N}_a = \frac{3RT}{4\pi a^3 \rho g\,(d-1)\,H} = 7,7 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}}$$

L'ordre de grandeur est bon. Quid des incertitudes de mesure ?

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com