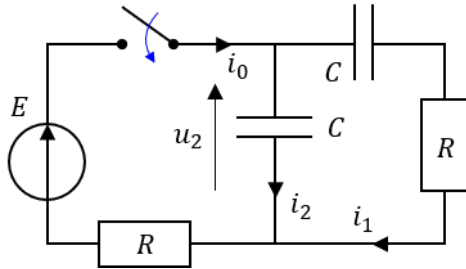


## Étude d'un oscillateur amorti [v3]

Dans le circuit ci-dessous, on suppose qu'un régime permanent est atteint. On ferme l'interrupteur en  $t = 0$ . On veut étudier l'évolution de  $u_2(t)$ .



1) Déterminer l'expression de  $u_2$  et de sa dérivée en  $t = 0^+$ . Déterminer l'expression de  $u_2$  en  $t \rightarrow \infty$ , notée  $u_\infty$ .

On admet pour le moment que :

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{du_2}{dt} + \omega_0^2 u_2 = \omega_0^2 u_\infty$$

2) Que vaut le facteur de qualité  $Q$  ? Dans quel régime se trouve-t-on ?

On pose :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{|\lambda^2 - \omega_0^2|}$$

3) Résoudre l'équation différentielle pour donner l'expression de  $u_2(t)$  pour  $t > 0$ .

4) Tracer l'allure de  $u_2(t)$ .

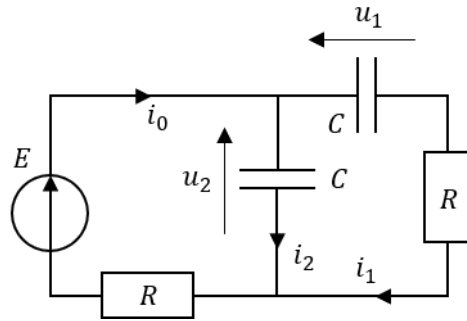
5) Démontrer l'équation différentielle donnée plus haut.



Correction

## Correction

1) Cf. schéma ci-dessous pour les notations.



En  $t = 0^-$ , toutes les grandeurs sont nulles. En particulier :

$$u_1(0^-) = u_2(0^-) = 0$$

Ces deux grandeurs continues en  $t = 0$ .

$$\boxed{u_2(0^+) = 0} \quad \text{et} \quad u_1(0^+) = 0$$

En  $t = 0^+$ , les deux condensateurs se comportent donc comme des fils. La résistance de la branche de droite est donc court-circuitée. Il vient :

$$E = R i_0(0^+) \quad \text{et} \quad i_0(0^+) = i_2(0^+) \quad \text{avec} : \quad i_2(0^+) = C \frac{du_2}{dt}(0^+)$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{du_2}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}}$$

Pour  $t \rightarrow \infty$ , un nouveau régime permanent est atteint. Les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. Donc  $i_0(+\infty) = 0$ . La loi des mailles donne :

$$E = R i_0 + u_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_2(+\infty) = u_\infty = E}$$

2) Il faut  $\boxed{Q = 1/3 < 1/2}$  donc régime aperiodique.

3) On a :

$$u_2(t) = u_\infty + e^{-\lambda t} [A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t)]$$

Avec les conditions initiales :

$$u_2(0^+) = 0 = u_\infty + A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -E}$$

Et,

$$\frac{du_2}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC} = -\lambda A + \Omega B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{E}{RC\Omega} - \frac{\lambda E}{\Omega}}$$

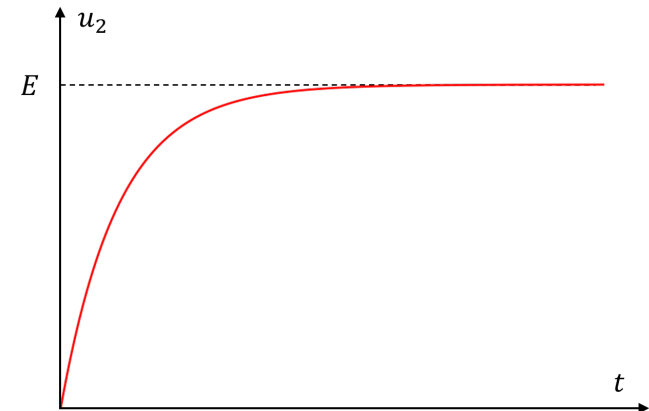
On en déduit :

$$\boxed{u_2(t) = E + e^{-\lambda t} \left[ -E \operatorname{ch}(\Omega t) + \left( \frac{E}{RC\Omega} - \frac{\lambda E}{\Omega} \right) \operatorname{sh}(\Omega t) \right]}$$

Avec les expression de  $Q$ ,  $\lambda$  et  $\omega_0 = 1/RC$  (cf. Q5), on a en réalité :

$$\boxed{u_2(t) = E \left[ 1 + e^{-\lambda t} \left( -\operatorname{ch}(\Omega t) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sh}(\Omega t) \right) \right]}$$

4) Graphe de  $u_2(t)$ .



5) On part de la loi des mailles :

$$E = R i_0 + u_2$$

$$E = R (i_1 + i_2) + u_2 \quad \leftarrow \quad u = R i_R \quad \text{et} \quad i_0 = i_1 + i_2$$

$$E = R i_1 + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 \quad \leftarrow \quad i_2 = C \frac{du_2}{dt}$$

Il ne reste qu'à exprimer  $i_1$  en fonction de  $u_2$  pour avoir l'équation différentielle.

$$u_2 = u_1 + Ri_1 \Rightarrow \frac{du_2}{dt} = \frac{i_1}{C} + R \frac{di_1}{dt}$$

On a donc :

$$E = Ri_1 + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 \quad (1)$$

et,

$$C \frac{du_2}{dt} = i_1 + RC \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

Calculons :

$$\frac{(1)}{R} + C \frac{d(1)}{dt} \Rightarrow \frac{E}{R} = \underbrace{i_1}_C + C \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R} + \underbrace{RC \frac{di_1}{dt}}_{RC^2 \frac{d^2u_2}{dt^2}} + C \frac{du_2}{dt}$$

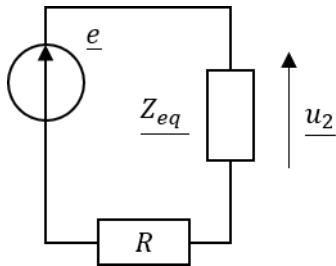
$$\Rightarrow \frac{E}{R} = C \frac{du_2}{dt} + C \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R} + RC^2 \frac{d^2u_2}{dt^2} + C \frac{du_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{(RC)^2} = \frac{E}{(RC)^2}$$

On a donc :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{3}$$

On peut également passer par la notation complexe pour démontrer cette équation différentielle (cf. chapitre E4). On pose l'impédance équivalente suivante :



$$\underline{Z}_{eq} = \left( j\omega C + \frac{1}{R + 1/j\omega C} \right)^{-1} = \left( j\omega C + \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \right)^{-1}$$

Un pont diviseur de tension donne alors :

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R} \underline{e} \Rightarrow \underline{e} = \left( 1 + R \times \underline{Z}_{eq}^{-1} \right) \underline{u}_2$$

On remplace  $\underline{Z}_{eq}$  par son expression et on multiplie chaque membre de l'égalité par  $1 + j\omega RC$ .

$$(1 + j\omega RC) \underline{e} = \left( 1 + j\omega RC + j\omega RC + (j\omega RC)^2 + j\omega RC \right) \underline{u}_2$$

Finalement, on repasse en réel.

$$E = u_2 + 3RC \frac{du_2}{dt} + (RC)^2 \frac{d^2u_2}{dt^2}$$

Donc, sous forme canonique :

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{(RC)^2} = \frac{E}{(RC)^2}$$