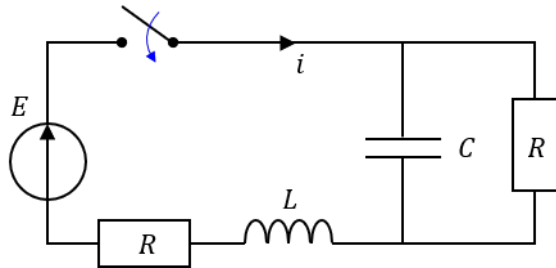


Étude d'un oscillateur amorti [v2]

Dans le circuit ci-dessous, on suppose qu'un régime permanent est atteint. On ferme l'interrupteur en $t = 0$. On veut étudier l'évolution de $i(t)$.



1) Déterminer l'expression de i et de sa dérivée en $t = 0^+$. Déterminer l'expression de i en $t \rightarrow \infty$, notée i_∞ .

On admet pour le moment que :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 i_\infty$$

2) Comment choisir Q pour que l'on observe un régime pseudo-périodique ? On suppose être dans ce cas pour la suite.

On pose :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{|\lambda^2 - \omega_0^2|}$$

3) Résoudre l'équation différentielle pour donner l'expression de $i(t)$ pour $t > 0$.

4) Tracer l'allure de $i(t)$ pour $Q = 10$.

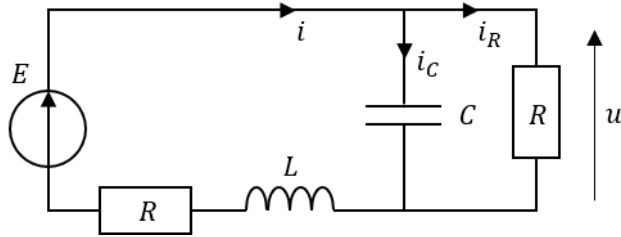
5) Démontrer l'équation différentielle donnée plus haut.



Correction

Correction

1) Cf. schéma ci-dessous pour les notations.



En $t = 0^-$, toutes les grandeurs sont nulles.

$$i(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad u(0^-) = 0$$

Les grandeurs continues en $t = 0$ sont : u et i .

$$i(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad u(0^+) = 0$$

La loi des mailles donne :

$$E = u + Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$$

Pour $t \rightarrow \infty$, un nouveau régime permanent est atteint. Le condensateur est équivalent à un circuit ouvert et la bobine à un fil. On a donc :

$$i(+\infty) = i_\infty = \frac{E}{2R}$$

2) Il faut $Q > 1/2$.

3) On a :

$$i(t) = i_\infty + e^{-\lambda t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

Avec les conditions initiales :

$$i(0^+) = 0 = i_\infty + A \Rightarrow A = -\frac{E}{2R}$$

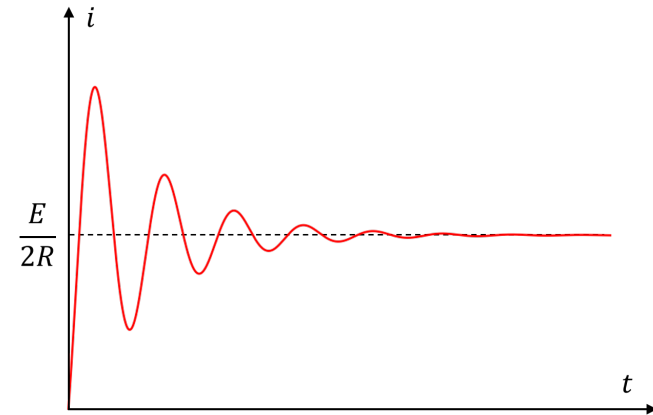
Et,

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L} = -\lambda A + \Omega B \Rightarrow B = \frac{E}{L\Omega} - \frac{\lambda E}{2R\Omega}$$

On en déduit :

$$i(t) = \frac{E}{2R} + e^{-\lambda t} \left[-\frac{E}{2R} \cos(\Omega t) + \left(\frac{E}{L\Omega} - \frac{\lambda E}{2R\Omega} \right) \sin(\Omega t) \right]$$

4) Graphe de $i(t)$.



5) On part de la loi des mailles :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + u$$

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + R \left(i - C \frac{du}{dt} \right) \quad \leftarrow u = Ri_R \quad \text{et} \quad i_R = i - i_C$$

$$E = 2Ri + L \frac{di}{dt} + RC \left(R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} \right) \quad \leftarrow u = E - Ri - L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{2}{LC} i = \frac{E}{LRC}$$

On a donc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \omega_0 \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right)^{-1}$$

On peut également passer par la notation complexe pour démontrer cette équation différentielle (cf. chapitre E4). On pose l'impédance équivalente totale du circuit :

$$\underline{Z}_{eq} = R + j\omega L + \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)^{-1} = R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Ainsi,

$$\underline{e} = \underline{Z}_{eq} \times \underline{i}$$

On remplace \underline{Z}_{eq} par son expression et on multiplie chaque membre de l'égalité par $1 + j\omega RC$.

$$(1 + j\omega RC) \underline{e} = \left(R + j\omega R^2 C + j\omega L + (j\omega)^2 RCL + R \right) \underline{i}$$

Finalement, on repasse en réel.

$$E = 2Ri + R^2 C \frac{di}{dt} + L \frac{di_L}{dt} + RLC \frac{d^2 i}{dt^2}$$

Donc, sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{2}{LC} i = \frac{E}{LRC}}$$