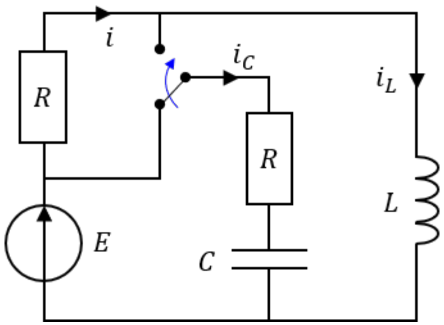
Étude d'un oscillateur amorti [v1]

Dans le circuit ci-dessous, on suppose qu'un régime permanent est atteint. On bascule l'interrupteur en $t = 0$. On veut étudier l'évolution de $i_L(t)$.



1) Déterminer l'expression de i_L et de sa dérivée en $t = 0^+$. Déterminer l'expression de i_L en $t \to \infty$, notée i_∞.

On admet pour le moment que :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2\, i_L = \omega_0^2\, i_\infty$$

2) Comment choisir Q pour que l'on observe un régime pseudo-périodique ? On suppose être dans ce cas pour la suite.

On pose :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{\left|\lambda^2 - \omega_0^2\right|}$$

3) Résoudre l'équation différentielle pour donner l'expression de $i_L(t)$ pour $t > 0$.

4) Tracer l'allure de $i_L(t)$ pour $Q = 10$.

5) Démontrer l'équation différentielle donnée plus haut.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) En $t=0^-$, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un circuit ouvert. Ainsi,

$$u_C(0^-)=E \qquad u_R(0^-)=u_L(0^-)=0 \qquad i_C(0^-)=0 \quad \text{et} \quad i_L(0^-)=\frac{E}{R}$$

Les grandeurs continues en $t=0$ sont : u_C et i_L.

$$\boxed{i_L(0^+)=\frac{E}{R}}$$

Lois des mailles et loi des nœuds que l'on applique en $t=0^+$:

$$\begin{cases} E=Ri+Ri_C+u_C \\ E=Ri+L\,\dfrac{di_L}{dt} \\ i=i_C+i_L \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} E=R\,i(0^+)+R\,i_C(0^+)+E \\ E=R\,i(0^+)+L\,\dfrac{di_L}{dt}(0^+) \\ i(0^+)=i_C(0^+)+\dfrac{E}{R} \end{cases}$$

La première équation donne :

$$i(0^+)=-i_C(0^+)$$

La troisième équation donne donc :

$$i(0^+)=\frac{E}{2R}$$

La deuxième équation donne finalement :

$$\boxed{\frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{E}{2L}}$$

Pour $t\to\infty$, un nouveau régime permanent est atteint. On a donc :

$$\boxed{i_L(+\infty)=i_\infty=\frac{E}{R}}$$

2) Il faut $\boxed{Q>1/2}$.

3) On a :

$$i_L(t)=i_\infty+e^{-\lambda t}\Big[A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)\Big]$$

Avec les conditions initiales :

$$i_L(0^+)=\frac{E}{R}=i_\infty+A \quad\Rightarrow\quad \boxed{A=0}$$

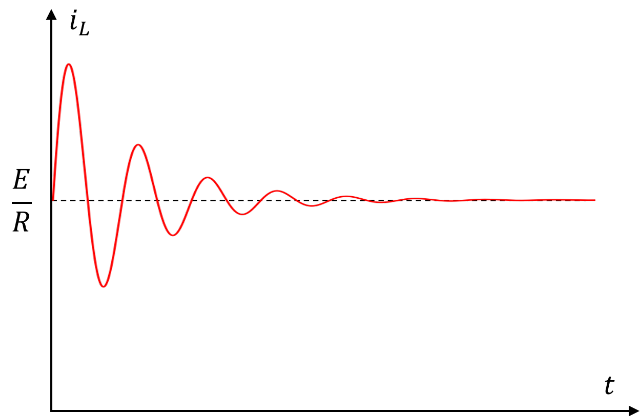
Et,

$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{E}{2L}=\Omega B \quad\Rightarrow\quad \boxed{B=\frac{E}{2L\Omega}}$$

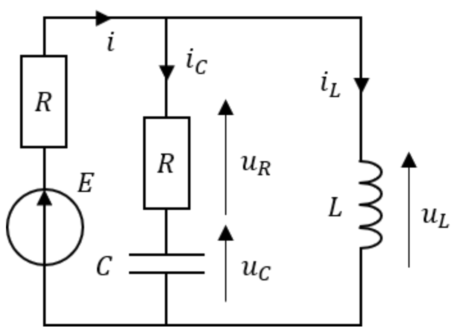
On en déduit :

$$\boxed{i_L(t)=\frac{E}{R}+\frac{E}{2L\Omega}\sin(\Omega t)\,e^{-\lambda t}}$$

4) Graphe de $i_L(t)$.



5) Notation :



Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Loi des mailles + loi des nœuds :

$$E = Ri + L\,\frac{di_L}{dt} = R\,(i_C + i_L) + L\,\frac{di_L}{dt} = R\left(C\,\frac{du_C}{dt} + i_L\right) + L\,\frac{di_L}{dt}$$

Il ne reste qu'à exprimer u_C en fonction de i_L pour avoir l'équation différentielle.

$$u_L = u_R + u_C \quad \Rightarrow \quad L\,\frac{di_L}{dt} = Ri_C + u_C \quad \Rightarrow \quad L\,\frac{di_L}{dt} = RC\,\frac{du_C}{dt} + u_C$$

On a donc :

$$\boxed{E = RC\,\frac{du_C}{dt} + Ri_L + L\,\frac{di_L}{dt}} \qquad (1)$$

et,

$$\boxed{L\,\frac{d^2 i_L}{dt^2} = RC\,\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{du_C}{dt}} \qquad (2)$$

Calculons :

$$\frac{d(1)}{dt} + \frac{(1)}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{RC} = \underbrace{RC\,\frac{d^2u_C}{dt^2}} + R\,\frac{di_L}{dt} + L\,\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \underbrace{\frac{du_C}{dt}} + \frac{i_L}{C} + \frac{L}{RC}\,\frac{di_L}{dt}$$

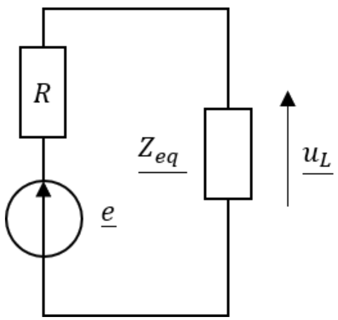
$$\Rightarrow \quad \frac{E}{RC} = \underbrace{L\,\frac{d^2 i_L}{dt^2}} + R\,\frac{di_L}{dt} + L\,\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{i_L}{C} + \frac{L}{RC}\,\frac{di_L}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{2LC} = \frac{E}{2LRC}}$$

On a donc :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \omega_0\left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right)^{-1}}$$

On peut également passer par la notation complexe pour démontrer cette équation différentielle (cf. chapitre E4). On pose l'impédance équivalente suivante :



$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R + 1/j\omega C}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}\right)^{-1}$$

Un pont diviseur de tension donne alors :

$$\underline{u_L} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + R}\,\underline{e} \quad \Rightarrow \quad \underline{e} = \left(1 + R \times \underline{Z_{eq}}^{-1}\right) j\omega L\,\underline{i_L}$$

On remplace $\underline{Z_{eq}}$ par son expression et on multiplie chaque membre de l'égalité par $1 + j\omega RC$.

$$(1 + j\omega RC)\,\underline{e} = \left(1 + j\omega RC + \frac{R}{j\omega L} + \frac{R^2 C}{L} + j\omega RC\right) j\omega L\,\underline{i_L}$$

Finalement, on repasse en réel.

$$E = L\,\frac{di_L}{dt} + RLC\,\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R\,i_L + R^2 C\,\frac{di_L}{dt} + RLC\,\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

Donc, sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{2LC} = \frac{E}{2LRC}}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com