

## État non stationnaire

Une particule qui se déplace sur un axe ( $Ox$ ) est soumise au potentiel représenté suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si : } 0 < x < a \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions d'onde des états stationnaires peuvent s'écrire sous la forme :

$$\psi_n(x, t) = \varphi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

- 1) Quelle est la dimension du potentiel ?
- 2) Les fonctions d'onde stationnaires peuvent-elles décrire une particule en mouvement ?
- 3) Expliquer la forme proposée de  $\psi_n(x, t)$  et donner l'expression de  $\varphi_n(x)$ .
- 4) Exprimer  $E_n$ .
- 5) Retrouver ce résultat via l'inégalité de Heisenberg.

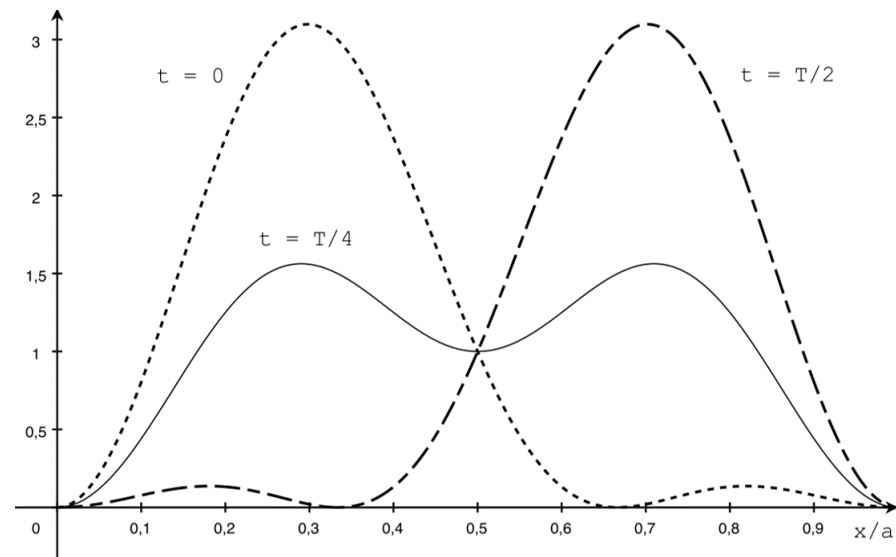
On place le système à  $t = 0$  dans l'état suivant :

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi_1(x, t = 0) + \psi_2(x, t = 0) \right]$$

6) Montrer que :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) e^{-i\omega t} \right] e^{-iE_1 t/\hbar}$$

- 7) Établir l'expression de la densité de probabilité de présence de la particule.
- 8) Commenter le résultat précédent.  
On donne au dos de la feuille le graphe de cette densité de probabilité de présence (en fonction de  $x/a$ ).
- 9) Commenter le graphe.
- 10) Que se passe-t-il pour  $t > T/2$  ?



Correction

## Correction

1) Le « potentiel » est en réalité une énergie potentielle. Il est donc homogène à une énergie.

2) La densité de probabilité de présence :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx} = |\psi_n(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2$$

ne dépend pas du temps. Donc pas de déplacement au cours du temps.

3) On cherche des états stationnaires, on peut donc écrire :

$$\psi_n(x, t) = \varphi(x) \times f(t)$$

On injecte cette solution dans l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' f + V(x) \varphi f = i\hbar \varphi f'$$

On sépare les variables :

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''}{\varphi} + V(x)}_{\text{fonction de } x} = \underbrace{i\hbar \frac{f'}{f}}_{\text{fonction de } t} = E$$

Une fonction de  $x$  ne peut être égale à une fonction de  $t$  que si ces fonctions sont constantes. On pose  $E$  la constante, car homogène à une énergie. Ainsi :

$$\frac{df}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} f(t) \Rightarrow \boxed{f(t) = e^{-iEt/\hbar}}$$

Dans le puits  $V(x) = 0$ , on a donc :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = E\varphi \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K^2 \varphi = 0 \quad \text{avec : } K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Ainsi :

$$\varphi(x) = A \cos(Kx) + B \sin(Kx)$$

Par continuité de  $\psi$  en  $x = 0$  :

$$\varphi(x=0) = A = 0$$

et en  $x = a$  :

$$\varphi(x=a) = B \sin(Ka) = 0 \Rightarrow Ka = n\pi \Rightarrow K_n = \frac{n\pi}{a}$$

Donc :

$$\boxed{\varphi_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{avec : } n \in \mathbb{N}^*}$$

On détermine finalement  $B$  grâce à la normalisation de la fonction d'onde :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^a |\psi_n(x, t)|^2 dx \\ &= B^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \\ &= \frac{B^2}{2} \int_0^a \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right) dx \\ &= \frac{B^2}{2} \left[x - \frac{\sin(2n\pi x/a)}{2n\pi/a}\right]_0^a \\ &= \frac{aB^2}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{avec : } n \in \mathbb{N}^*}$$

4) Avec ce qui précède :

$$K_n = \frac{n\pi}{a} = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar} \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

5) On a :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{2} \quad \text{avec : } \Delta x = a \Rightarrow \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{2a}$$

Or,

$$\boxed{E = \frac{p_x^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{8ma^2}}$$

On retrouve bien l'ordre de grandeur du fondamental ( $n = 1$ ).

6) On a :

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) e^{-iE_1t/\hbar} + \varphi_2(x) e^{-iE_2t/\hbar}] \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + \varphi_2(x) e^{-i\omega t}] e^{-iE_1t/\hbar} \text{ avec : } \omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}}\end{aligned}$$

7) On a :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{P}}{dx} &= |\psi(x, t)|^2 \\ &= \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t) \\ &= \frac{1}{2} [\varphi_1(x) + \varphi_2(x) e^{-i\omega t}] [\varphi_1(x) + \varphi_2(x) e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} [\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + \varphi_1(x) \varphi_2(x) (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})] \\ &= \boxed{\frac{1}{2} [\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + 2 \varphi_1(x) \varphi_2(x) \cos(\omega t)]}\end{aligned}$$

8) La densité de probabilité dépend périodiquement du temps : oscillations quantiques. La fréquence des oscillations dépend uniquement de la différence d'énergie entre les deux états. La particule est dans un état non stationnaire, son énergie n'est pas fixée.

9) À  $t = 0$  : forte probabilité de trouver la particule à  $x/a \simeq 0,3$ . À  $t = T/4$  : probabilité égale de trouver la particule à  $x/a \simeq 0,3$  et  $x/a \simeq 0,7$ . À  $t = T/2$  : forte probabilité de trouver la particule à  $x/a \simeq 0,7$ . La particule s'est bien « déplacée » de gauche à droite.

10) L'évolution du système est périodique. À  $t = T/2$ , la particule « rebondit » sur le puits de potentiel pour faire demi-tour. À  $t = 3T/4$  : même profil qu'à  $t = T/4$ . À  $t = T$  : même profil qu'à  $t = 0$ . La particule « rebondit » sur le puits de potentiel pour faire demi-tour. Le mouvement se répète ainsi indéfiniment.