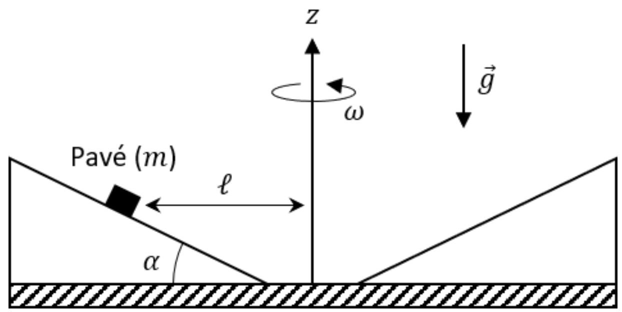
## Équilibre dans un référentiel tournant

Un plan incliné d'angle $\alpha = 30\,°$ par rapport à l'horizontale est placé sur un plateau en rotation à la vitesse angulaire $\omega$. Un pavé est posé sur le plan incliné et le coefficient de frottement statique est $f = 0,25$. Le pavé est à l'équilibre sur le plan incliné à une distance $\ell = 40$ cm de l'axe de rotation.




On définit $\mathcal{R}$ le référentiel lié au sol supposé galiléen et $\mathcal{R}'$ le référentiel mobile dans lequel le pavé est à l'équilibre.

1) Faire un bilan des forces exercées sur $M$ dans $\mathcal{R}'$.

2) En déduire les expressions des composantes normale $R_N$ et tangentielle $R_T$ de la réaction du plan incliné sur le pavé.

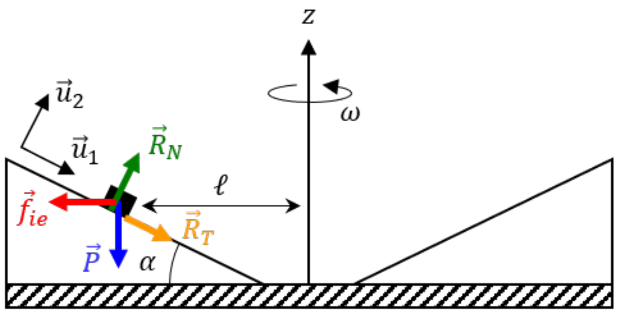
3) En déduire la vitesse angulaire $\omega_0$ qui annule $R_T$. Faire l'application numérique.

4) Déterminer, en fonction entre autres de $\omega_0$, les vitesses angulaires minimum $\omega_{min}$ et maximum $\omega_{max}$ qui permettent d'éviter que le pavé ne glisse respectivement vers l'intérieur et vers l'extérieur du manège. Faire les applications numériques.

Correction

## Correction

1) Notations :




Bilan des forces dans $\mathcal{R}'$ (non galiléen), dans la base $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$, lorsque le pavé est immobile.

$$\begin{cases} \overrightarrow{P} = mg\,(-\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u}_2 + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_1) \\ \overrightarrow{R}_N = R_N\,\overrightarrow{u}_2 \\ \overrightarrow{R}_T = R_T\,\overrightarrow{u}_1 \\ \overrightarrow{f}_{ie} = m\omega^2\ell\,(-\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u}_1 - \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_2) \\ \overrightarrow{f}_{ic} = -2m\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

2) PFD dans $\mathcal{R}'$, lorsque le pavé est immobile.

$$\begin{cases} 0 = mg\sin(\alpha) + R_T - m\omega^2\ell\cos(\alpha) \\ 0 = -mg\cos(\alpha) + R_N - m\omega^2\ell\sin(\alpha) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} R_T = mg\sin(\alpha) - m\omega^2\ell\cos(\alpha) \\ R_N = mg\cos(\alpha) + m\omega^2\ell\sin(\alpha) \end{cases}$$

3) La vitesse angulaire $\omega_0$ qui annule $R_T$ vaut donc :

$$0 = mg\sin(\alpha) - m\omega_0^2\ell\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}\tan(\alpha)} = 3,76\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

4) On se place à la limite de glissement :

$$|R_T| = fR_N$$

De plus, si $\omega < \omega_0$ alors $R_T < 0$. Et si $\omega > \omega_0$ alors $R_T > 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \omega = \omega_{min} < \omega_0 & \Rightarrow \quad -R_T = fR_N \\ \omega = \omega_{max} > \omega_0 & \Rightarrow \quad R_T = fR_N \end{cases}$$

Ainsi, pour $\omega = \omega_{min}$ on a :

$$\begin{aligned} & -R_T = fR_N \\ \Rightarrow \quad & mg\sin(\alpha) - m\omega_{min}^2\ell\cos(\alpha) = f\left[mg\cos(\alpha) + m\omega_{min}^2\ell\sin(\alpha)\right] \\ \Rightarrow \quad & \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\ell} \times \frac{\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + f\sin(\alpha)}} \\ \Rightarrow \quad & \boxed{\omega_{min} = \omega_0\sqrt{\frac{1 - f/\tan(\alpha)}{1 + f\tan(\alpha)}} = 2,65\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}} \end{aligned}$$

De même, pour $\omega = \omega_{max}$ on a :

$$\begin{aligned} & R_T = fR_N \\ \Rightarrow \quad & -mg\sin(\alpha) + m\omega_{max}^2\ell\cos(\alpha) = f\left[mg\cos(\alpha) + m\omega_{max}^2\ell\sin(\alpha)\right] \\ \Rightarrow \quad & \omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{\ell} \times \frac{\sin(\alpha) + f\cos(\alpha)}{\cos(\alpha) - f\sin(\alpha)}} \\ \Rightarrow \quad & \boxed{\omega_{max} = \omega_0\sqrt{\frac{1 + f/\tan(\alpha)}{1 - f\tan(\alpha)}} = 4,87\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}} \end{aligned}$$


Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com