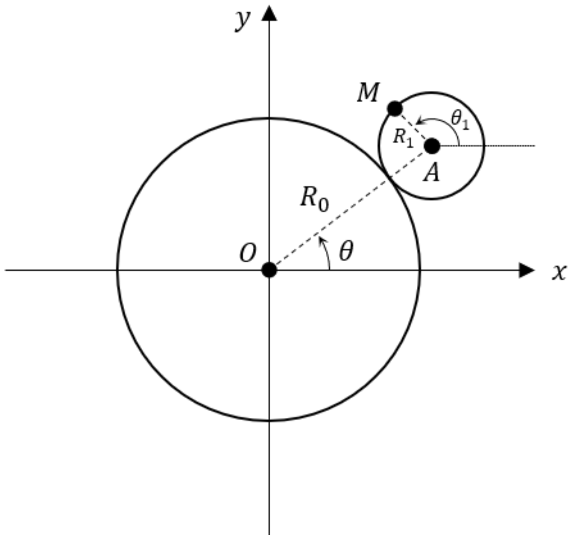
Épicycloïde

Une épicycloïde est la trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur un autre cercle (fixe).



On note R_0 le rayon du cercle fixe, centré sur l'origine de repère, et $R_1 = R_0/q$ le rayon du cercle en mouvement. On note O, A et M respectivement le centre du repère, le centre du cercle mobile, et le point qui décrit l'épicycloïde. On repère le point A par l'angle θ que fait $\overrightarrow{OA}$ avec l'axe des abscisses.

On suppose que le mouvement de A est uniforme (vitesse angulaire ω) et on choisit comme condition initiale ($t = 0$) : $\overrightarrow{OM} = R_0\,\overrightarrow{u}_x$.

On admet que, dans le référentiel centré sur A, le mouvement de M est uniforme à la vitesse angulaire $(q + 1)\,\omega$.

Données :

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

1) Décrire le mouvement des points A et M, respectivement dans les référentiels centrés sur Oet A. En déduire les expression de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AM}$ en fonction de R_1, q, ω, t, $\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{u}_y$.

2) Déterminer l'expression des vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ et vitesse dans la base cartésienne.

3) On se place dans le cas où $q = 4$. Déterminer les angles où la vitesse s'annule. Tracer la courbe.

4) Donner une condition sur q pour que la trajectoire soit fermée.

Correction

Correction

1) Dans le référentiel centré sur O, le point A décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon $R_0 + R_1$ à la vitesse angulaire ω constante. Dans le référentiel centré sur A, le point M décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon R_1 à la vitesse angulaire $(q+1)\,\omega$ constante.

Mathématiquement, on a donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{OA} & = & R_1\,(q+1)\,(\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\omega t)\,\overrightarrow{u_y}) \\ \overrightarrow{AM} & = & -R_1\,(\cos((q+1)\,\omega t)\,\overrightarrow{u_x} + \sin((q+1)\,\omega t)\,\overrightarrow{u_y}) \end{array}\right.$$

2) Vecteur position :

$$\overrightarrow{OA} = R_1 \begin{pmatrix} (q+1)\cos(\omega t) - \cos((q+1)\,\omega t) \\ (q+1)\sin(\omega t) - \sin((q+1)\,\omega t) \end{pmatrix}$$

Vecteur vitesse :

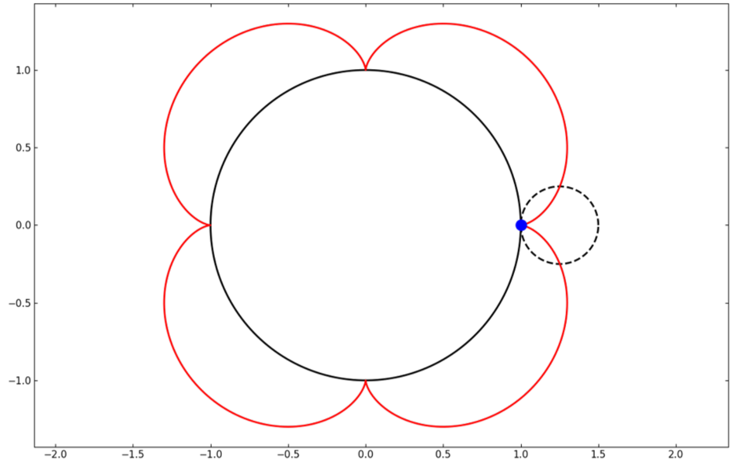
$$\overrightarrow{v} = R_1\,(q+1)\,\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) + \sin((q+1)\,\omega t) \\ \cos(\omega t) - \cos((q+1)\,\omega t) \end{pmatrix}$$

3) On se place dan le cas où $q = 4$.

$$\overrightarrow{v} = 5R_1\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) + \sin(5\omega t) \\ \cos(\omega t) - \cos(5\omega t) \end{pmatrix}$$

La vitesse est nulle pour $\omega t = \dfrac{n\pi}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

On obtient la courbe :



4) Si $q \in \mathbb{Z}$ la trajectoire se ferme au bout d'un tour (le petit cercle fait q tours durant ce temps). Si $q = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (fraction irréductible) la trajectoire se ferme au bout de b tours (le petit cercle fait a tours durant ce temps).