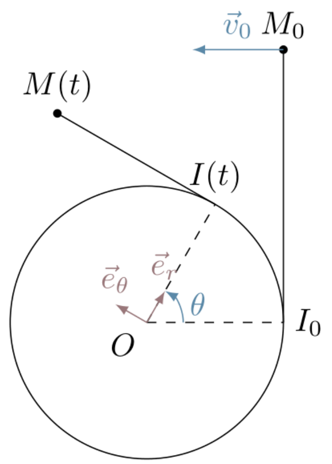
Enroulage d'un fil autour d'un cylindre

Un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable, est accroché tangentiellement à un cylindre de rayon R. À l'extrémité libre est accroché un point matériel M, de masse m. L'effet de la pesanteur est négligé.



Le fil est tendu et M lancé depuis la position M_0, perpendiculairement au fil, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, afin d'enrouler le fil autour du cylindre.

On utilise la base polaire relative au point I, point du fil le plus proche de M à être en contact avec le cylindre.

1) Déterminer $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{v}$ puis $\overrightarrow{a}$ dans la base polaire.

2) En utilisant le PFD, montrer que la vitesse radiale de M est constante. Que vaut cette constante ?

3) En déduire par intégration une relation entre θ et t, puis déterminer la durée totale τ nécessaire pour enrouler le fil en totalité.

4) Établir la loi horaire :

$$\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right)$$

5) Vérifier que le fil reste tendu tout au long du mouvement.

Correction

Correction

1) Vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = R\overrightarrow{u_r} + (L - R\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

En effet, la longueur IM est égale à la longueur totale du fil L où on retranche la longueur du fil déjà enroulée $R\theta$.

On en déduit en dérivant :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = -\left(L - R\theta\right)\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{a} = R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} - \left(L - R\theta\right)\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_r} - \left(L - R\theta\right)\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_\theta}}$$

2) Lamasse ne subit que la tension du fil.

$$\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_\theta}$$

Le PFD donne donc :

$$\begin{cases} mR\dot{\theta}^2 - m\left(L - R\theta\right)\ddot{\theta} = 0 \\ -m\left(L - R\theta\right)\dot{\theta}^2 = -T \end{cases}$$

Or la vitesse radiale vaut :

$$v_r = -\left(L - R\theta\right)\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_r = R\dot{\theta}^2 - \left(L - R\theta\right)\ddot{\theta} = 0$$

On remarque que la dérivée de v_r est nulle d'après la première équation du PFD. Donc v_r est constante, égale à sa valeur initiale.

$$v_r = cte = -v_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \left(L - R\theta\right)\dot{\theta}}$$

3) On sépare les variations θ et t puis on intègre entre l'instant initial et un instant quelconque.

$$\begin{aligned} v_0 = \left(L - R\theta\right)\frac{d\theta}{dt} \quad &\Rightarrow \quad v_0 dt = \left(L - R\theta\right)d\theta \\ &\Rightarrow \quad \int_0^t v_0 dt = \int_0^\theta \left(L - R\theta\right)d\theta \\ &\Rightarrow \quad \boxed{v_0 t = L\theta - \frac{R}{2}\theta^2} \end{aligned}$$

On cherche le temps τ tel que $\theta = L/R$.

$$v_0\tau = \frac{L^2}{R} - \frac{L^2}{2R} = \frac{L^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{L^2}{2Rv_0}}$$

4) On combine les deux résultats de la question précédente :

$$\theta^2 - \frac{2L}{R}\theta + \frac{2v_0 t}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta^2 - \frac{2L}{R}\theta + \frac{L^2 t}{R^2\tau} = 0$$

Il s'agit d'un polynôme d'ordre 2. Le discriminant vaut :

$$\Delta = \left(\frac{2L}{R}\right)^2 - \frac{4L^2 t}{R^2\tau} = \left(\frac{2L}{R}\right)^2\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \geq 0$$

On en déduit les solutions :

$$\theta_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{2L}{R} \pm \frac{2L}{R}\sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right)$$

Seule la solution « $-$ » est acceptable car $\theta = 0$ pour $t = 0$. Donc :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right)}$$

5) Le fil reste tendu si la tension T reste positive. En effet

$$T = m\left(L - R\theta\right)\dot{\theta}^2 > 0$$

car $\dot{\theta}^2 > 0$ (c'est un carré) et $\theta_{max} = L/R$ donc $\theta < L/R$.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com