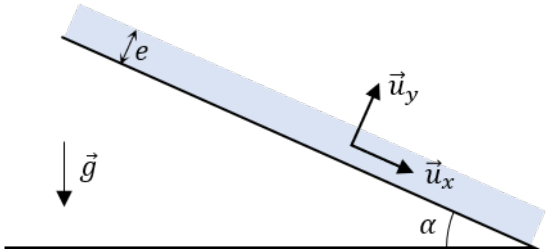
Écoulement sur un plan incliné

Une couche de fluide de masse volumique μ et de viscosité η, d'épaisseur e constante, s'écoule sur un plan incliné d'angle α. On note $\overrightarrow{u}_y$ la perpendiculaire ascendante au plan incliné et $\overrightarrow{u}_x$ la ligne de plus grande pente descendante.



L'écoulement est stationnaire, incompressible, décrit par le champ des vitesses approché :

$$\overrightarrow{v} = v_x(x,y)\,\overrightarrow{u}_x$$

1) Montrer que $v_x(x,y)$ est indépendant de x.

2) Déterminer la pression $P(x,y)$.

3) Montrer que v_x est solution de l'équation :

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\frac{g}{\nu}\,\mathrm{sin}(\alpha)$$

4) La viscosité de l'air, contrairement à celle du fluide de l'écoulement, est supposé nulle. En déduire les deux conditions aux limites en $y=0$ et $y=e$.

5) Déterminer alors $v_x(y)$ en fonction de y, g, α, ν et e.

6) Déterminer l'expression du débit massique D_m pour une largeur L.

On suppose dans la suite que $e(x,t)$ est une fonction de x et de t. On admet que le débit calculer précédemment reste valable.

7) En effectuant un bilan de masse sur le système ouvert que constitue la tranche de fluide comprise entre x et $x+dx$, montrer que $e(x,t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{g}{\nu}\,\mathrm{sin}(\alpha)\;e^2\,\frac{\partial e}{\partial x}$$

8) Prévoir alors qualitativement l'évolution d'un bourrelet à la surface du liquide

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Écoulement incompressible donc :

$$\text{div}(\overrightarrow{v}) = \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0}$$

2) Équation de Navier-Stokes (stationnaire) :

$$\mu \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \mu \left[\underbrace{\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}}_{= \overrightarrow{0}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \overrightarrow{v}}_{= v_x \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial x} = \overrightarrow{0}} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \mu \overrightarrow{g} + \eta \, \Delta \overrightarrow{v}$$

On projette sur chaque axe :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu g \sin(\alpha) + \eta \, \dfrac{d^2 v_x}{dy^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y} - \mu g \cos(\alpha) \end{cases}$$

La deuxième équation donne :

$$P(x, y) = -\mu g y \cos(\alpha) + f(x)$$

Or, la condition aux limites :

$$\forall \ x \quad P(x, y = e) = P_0 = -\mu g e \cos(\alpha) + f(x)$$

Donc :

$$\boxed{P(x, y) = P_0 + \mu g \, (e - y) \cos(\alpha)}$$

3) La projection sur l'axe (Ox) de l'équation de Navier-Stokes donne :

$$\mu g \sin(\alpha) + \eta \, \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\frac{g}{\nu} \sin(\alpha)} \quad \text{avec :} \quad \nu = \frac{\eta}{\mu}$$

4) L'eau est visqueuse donc continuité de la vitesse en $y = 0$. La force de viscosité de l'air sur l'eau en $y = e$ est nulle. On en déduit :

$$\boxed{v_x(y = 0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{F(y = e) = \eta S \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=e} = 0}$$

5) Avec ces conditions, on en déduit :

$$\boxed{v_x(y) = \frac{g}{\nu} \sin(\alpha) \, y \left(e - \frac{y}{2}\right)}$$

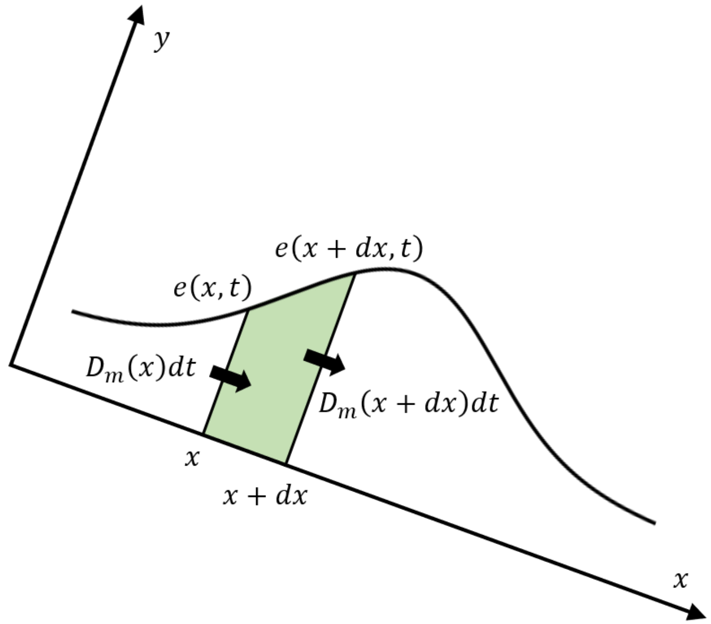
6) Le débit volumique vaut :

$$D_m = \iint \mu \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_0^e \frac{\mu g}{\nu} \sin(\alpha) \, y \left(e - \frac{y}{2}\right) \times L dy$$

Donc :

$$\boxed{D_m = \frac{\mu g L e^3}{3\nu} \sin(\alpha)}$$

7)



Système : tranche de fluide entre x et $x + dx$. La masse de fluide δm va varier entre les instants t et $t + dt$ en fonction des débit massique entrant en x et sortant en $x + dx$.

$$\begin{aligned} d\left(\delta m\right) &= \delta m(t + dt) - \delta m(t) = \frac{\partial \left(\delta m\right)}{\partial t} dt \\ &= D_m(x) \, dt - D_m(x + dx) \, dt = -\frac{\partial D_m}{\partial x} dx dt \end{aligned}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Or,

$$\delta m = \mu L dx \times e(x,t) \quad \text{et} \quad D_m = \frac{\mu g L}{3\nu}\,\text{sin}(\alpha) \times e^3(x,t)$$

Ainsi,

$$\mu L\,\frac{\partial e}{\partial t}dxdt = -\frac{\mu g L}{3\nu}\,\text{sin}(\alpha)\;3e^2\,\frac{\partial e}{\partial x}dxdt$$

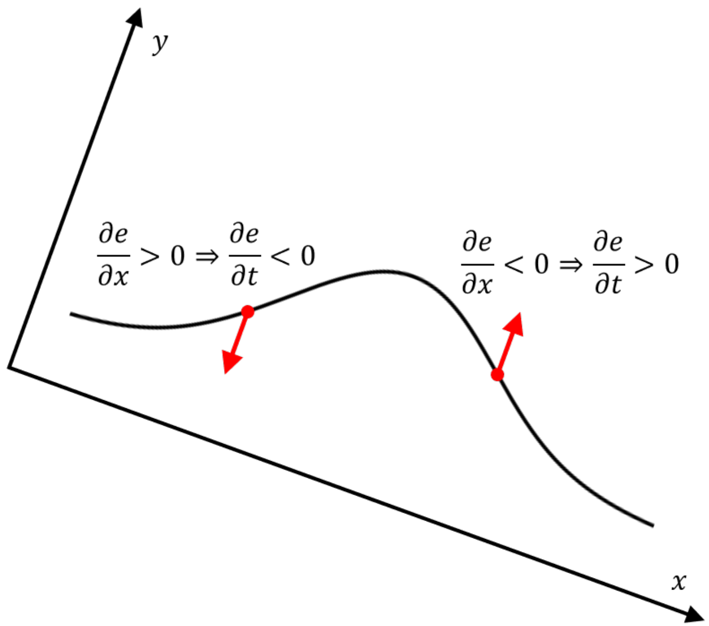
Après simplification :

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{g}{\nu}\,\text{sin}(\alpha)\;e^2\,\frac{\partial e}{\partial x}}$$

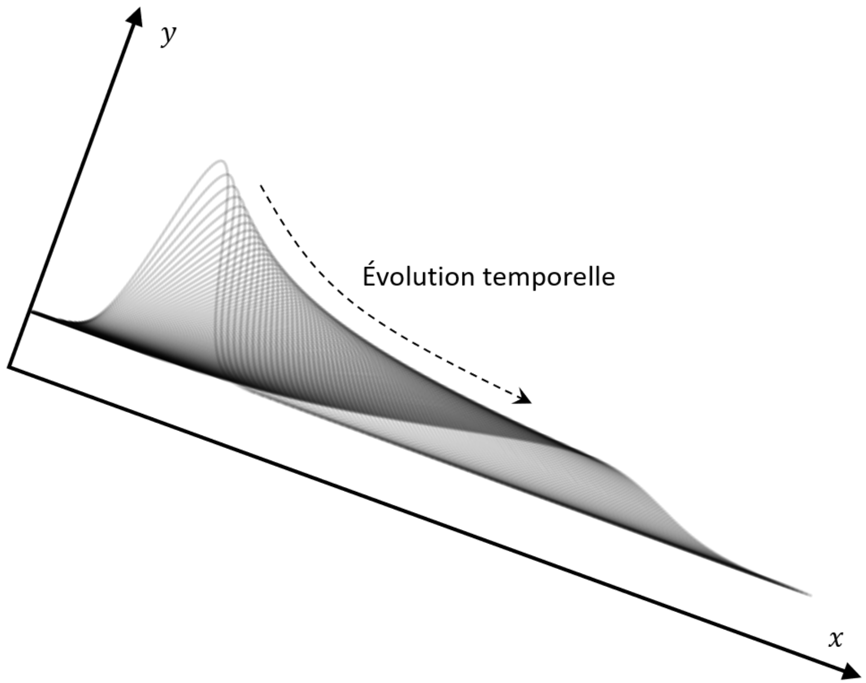
8) On constante donc que :

$$\frac{\partial e}{\partial t} \propto -\frac{\partial e}{\partial x}$$

Les variations temporelle de e sont reliées aux variations spatiales par la relation ci-dessus. Donc si $e(x)$ augmente, alors $e(t)$ va diminuer, et inversement. Une bosse progresse donc le long de la pente.



Une résolution numérique montre également qu'une bosse s'étale avec le temps, comme on peut constater dans la vie réelle.



Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com