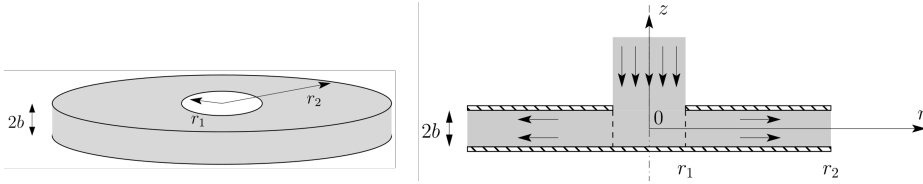


Écoulement radial entre deux disques

Soient deux disques de rayon r_2 séparés par un espace $2b$. On injecte un fluide incompressible (masse volumique ρ , viscosité η) à une pression $P_0 + \Delta P$ (P_0 la pression atmosphérique) par un trou de rayon r_1 percé dans le disque supérieur. Le fluide s'écoule entre les deux disques et débouche à l'atmosphère en $r = r_2$. On néglige les effets de la pesanteur.



On fait l'hypothèse que l'écoulement est purement radial entre r_1 et r_2 , poussé par une pression $P_0 + \Delta P$ en $r = r_1$. On raisonnera donc en coordonnées cylindriques et on supposera une symétrie de révolution. On se place en régime stationnaire. Sous ces hypothèses, on a donc :

$$\vec{v} = v_r(r, z) \vec{u}_r$$

Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\vec{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Pour le profil de vitesse considéré, on a :

$$\Delta \vec{v} = \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right] \vec{u}_r$$

- 1) Montrer que la vitesse radiale s'écrit : $v_r(r, z) = \phi(z) / r$
- 2) Écrire l'équation de Navier-Stokes projetée sur chaque axe. En déduire que la pression ne dépend que de r .
- 3) Afin de pouvoir calculer le profil de vitesses, on doit négliger le terme proportionnel à ρ dans l'équation de Navier-Stokes. Quand peut-on faire cette approximation ? Comment s'appelle ce type d'écoulement ?
- 4) Avec l'approximation précédente, montrez que l'équation se sépare en deux équations différentielles indépendantes sur r et sur z , respectivement, avec une constante

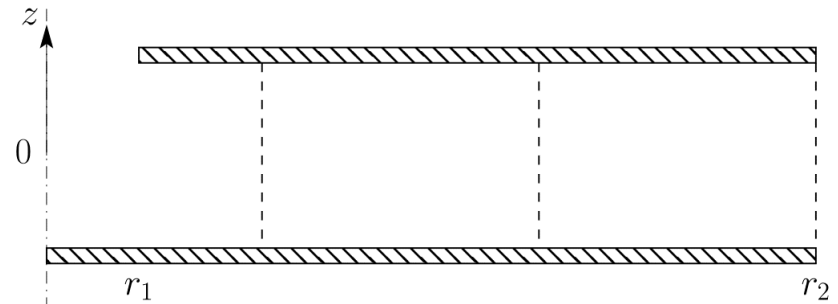
de séparation K .

- 5) Déterminez la constante K en fonction de η , ΔP , r_1 et r_2 .
- 6) Écrire les conditions aux limites que doit vérifier le champ de vitesse, puis en déduire $\phi(z)$ et $v_r(r, z)$. Les exprimer en fonction de U_0 .

$$U_0 = \frac{b^2 \Delta P}{2\eta r_2 \ln(r_2/r_1)}$$

Que représente U_0 ?

- 7) Recopier le schéma ci-dessous et tracer au niveau des lignes pointillées le profil des vitesses obtenu par calcul.



- 8) Calculez le débit volumique D_v injecté en fonction de U_0 , puis de ΔP .
- 9) On revient sur l'approximation faite à la question 3. Grâce à vos résultats précédents, estimez le en nombre de Reynolds en un point de coordonnées $(r, z = 0)$ en fonction de U_0 , r_2 , r et des propriétés physiques du fluide. En déduire une condition pour que l'approximation faite en Q3 soit valable.



Correction

1) L'écoulement est incompressible, donc :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow rv_r = \phi(z) \Rightarrow \boxed{v_r(r, z) = \frac{\phi(z)}{r}}$$

2) Équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(P) + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Or, on est dans le cas d'un écoulement stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$; et on néglige la pesanteur : $\rho \vec{g} = \vec{0}$. De plus :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{u}_r = -\frac{\phi^2}{r^3} \vec{u}_r$$

Enfin (avec le formulaire),

$$\Delta \vec{v} = \left[\frac{2\phi}{r^3} + \frac{\phi''}{r} - \frac{\phi}{r^3} - \frac{\phi}{r^3} \right] \vec{u}_r = \frac{1}{r} \frac{d^2\phi}{dz^2} \vec{u}_r$$

On assemble tout et on projette sur chaque axe :

$$\begin{cases} (1) & -\rho \frac{\phi^2}{r^3} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{d^2\phi}{dz^2} \\ (2) & 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

L'équation (2) assure que la pression ne dépend pas de z et dépend donc que de r .

3) On néglige le terme de convection devant le terme de diffusion. C'est une bonne approximation pour les écoulement à faible nombre de Reynolds. L'écoulement sera laminaire.

4) L'équation (1) donne, avec l'approximation précédente :

$$0 = -\frac{dP}{dr} + \frac{\eta}{r} \frac{d^2\phi}{dz^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{r}{\eta} \frac{dP}{dr} = K}$$

Le premier terme est une fonction de z et le second une fonction de r . Ces deux termes sont donc nécessairement constant.

5) On peut intégrer l'équation portant sur r entre r_1 , où la pression vaut $P_0 + \Delta P$, et r_2 , où la pression vaut P_0 .

$$\begin{aligned} dP = \eta K \frac{dr}{r} &\Rightarrow \int_{P_0 + \Delta P}^{P_0} dP = \eta K \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \\ &\Rightarrow -\Delta P = \eta K \ln(r_2/r_1) \\ &\Rightarrow \boxed{K = -\frac{\Delta P}{\eta \ln(r_2/r_1)} = -\frac{2r_2 U_0}{b^2}} \end{aligned}$$

6) Puisque le fluide est visqueux, la vitesse est nulle au niveau des parois :

$$\phi(z = \pm b) = 0$$

Ainsi,

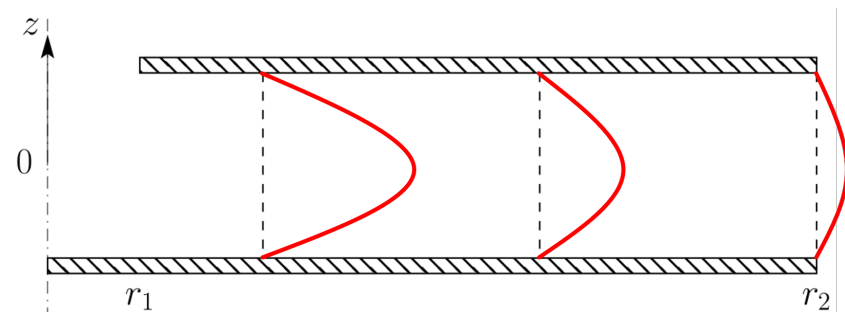
$$\phi''(z) = K \Rightarrow \boxed{\phi(z) = \frac{K}{2} (z^2 - b^2) = U_0 r_2 \left(1 - \frac{z^2}{b^2} \right)}$$

Et le champ de vitesse :

$$\boxed{v_r(r, z) = \frac{1 - (z/b)^2}{r/r_2} U_0}$$

U_0 représente la vitesse en $z = 0$ et $r = r_2$, c'est-à-dire la vitesse du milieu du jet au point de sortie.

7) C'est un profil parabolique.



8) Débit volumique à travers la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur $2b$.

$$D_v = \iint \vec{v} \cdot \vec{dS} = \int_{-b}^b \frac{1 - (z/b)^2}{r/r_2} U_0 \times 2\pi r dz = U_0 2\pi r_2 \left[z - \frac{z^3}{3b^2} \right]_{-b}^b$$

Ainsi,

$$D_v = \frac{U_0 8\pi r_2 b}{3} = \frac{4\pi b^3 \Delta P}{3\eta \ln(r_2/r_1)}$$

9) Déterminons l'expression du nombre de Reynolds au point $(r, z = 0)$:

$$\mathcal{R}e(z = 0) = \frac{\|\eta \Delta \vec{v}\|}{\left\| \rho \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right\|} \Bigg|_{z=0} = \frac{\eta \phi''/r}{-\rho \phi^2/r^3} \Bigg|_{z=0} = \boxed{\frac{\rho U_0 r_2}{\eta r}}$$

Pour avoir un écoulement laminaire, il faut typiquement :

$$\boxed{\mathcal{R}e(r = r_1, z = 0) = \frac{\rho U_0 r_2}{\eta r_1} < 10^3}$$

Si cette condition est respectée pour $r = r_1$ et $z = 0$ (point où la vitesse est maximale), elle est respectée pour tout r et tout z .