Écoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons respectifs R_1 et R_2 et tournant autour de leur axe commun aux vitesses angulaires ω_1 et ω_2 , peut être décrit par le champ de vitesses

$$\overrightarrow{v} = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

On admet qu'il y a continuité de la vitesse entre le fluide et les cylindres.

1) Déterminer les constantes A et B à partir des conditions aux limites sur les vitesses au contact entre le fluide et les cylindres.

2) Commenter le cas où $\omega_1 = \omega_2$.

3) L'écoulement est-il incompressible ? irrotationnel ?

4) Déterminer l'accélération d'une particule fluide. Que devient-elle dans le cas où $\omega_1 = \omega_2$?

<u>Formulaire</u> : en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial A}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(A) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) On doit imposer :

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{v}(r=R_1)=R_1\omega_1\overrightarrow{u_\theta}=\left(AR_1+\dfrac{B}{R_1}\right)\overrightarrow{u_\theta}\\ \overrightarrow{v}(r=R_2)=R_2\omega_2\overrightarrow{u_\theta}=\left(AR_2+\dfrac{B}{R_2}\right)\overrightarrow{u_\theta}\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\omega_1=A+\dfrac{B}{R_1^2}\\ \omega_2=A+\dfrac{B}{R_2^2}\end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\boxed{B=\frac{\omega_2-\omega_1}{1/R_2^2-1/R_1^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{A=\frac{\omega_2R_2^2-\omega_1R_1^2}{R_2^2-R_1^2}}$$

2) Si $\omega_1=\omega_2=\omega_0$:

$$B=0 \quad \text{et} \quad A=\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{v}=r\omega_0\overrightarrow{u_\theta}}$$

Tout se passe comme si l'ensemble était un cylindre solide qui tourne sur lui même à la vitesse angulaire ω.

3) On a immédiatement :

$$\text{div}(\overrightarrow{v})=\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=0$$

Donc l'écoulement est incompressible.

De plus :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{v})=\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\overrightarrow{u_z}=2A\overrightarrow{u_z}\neq\overrightarrow{0}$$

Donc l'écoulement n'est pas irrotationnel.

4) L'accélération vaut :

$$\overrightarrow{a}=\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}=\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}+\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}=v\underbrace{\frac{\partial\overrightarrow{u_\theta}}{\partial t}}_{=\overrightarrow{0}}+\frac{v^2}{r}\underbrace{\frac{\partial\overrightarrow{u_\theta}}{\partial\theta}}_{=-\overrightarrow{u_r}}$$

En effet, $\overrightarrow{u_\theta}$ ne dépend que de la variable θ, pas de la variable t.

$$\overrightarrow{u_\theta}=\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y}-\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x}$$

Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{a}=-\frac{1}{r}\left(Ar+\frac{B}{r}\right)^2\overrightarrow{u_r}}$$

Si $\omega_1=\omega_2=\omega_0$:

$$\boxed{\overrightarrow{a}=-r\omega_0^2\overrightarrow{u_r}}$$

Ce qui est attendu pour un mouvement circulaire à la pulsation ω_0.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com