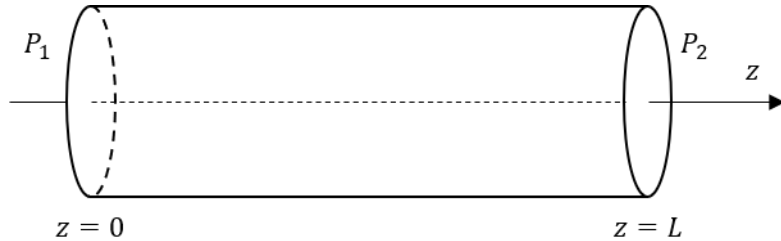


## Écoulement de Poiseuille dans un cylindre

Un fluide de viscosité  $\eta$  et de masse volumique  $\mu$  s'écoule en régime stationnaire dans une conduite cylindrique horizontale d'axe  $(Oz)$ , de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . On suppose que l'écoulement est incompressible et on néglige la pesanteur.



Du fait des symétries du problème (invariance par rotation autour de l'axe  $z$ ), on cherche en coordonnées cylindriques un champ de vitesse et un champ de pression de la forme :

$$\vec{v}(M) = v_z(r, z) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad P(M) = P(r, z)$$

Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\vec{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Pour le profil de vitesse considéré, on a :

$$\Delta \vec{v} = \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \vec{u}_z$$

- 1) Montrer que  $v_z$  ne dépend que de  $r$ .
- 2) Montrer que le champ des accélérations  $\vec{a}(M)$  est nul.
- 3) Montrer que la pression ne dépend pas de  $r$ .
- 4) Montrer que  $dP/dz$  est une constante, notée  $K$ , puis établir l'équation différentielle dont est solution  $v_z$ .

On note  $P_1 = P(z = 0)$  et  $P_2 = P(z = L)$  les pressions à l'entrée et à la sortie de la conduite. On note également  $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$  que l'on suppose positif.

5) Déterminer  $K$  puis  $v_z$  en fonction de  $U_0$  et des paramètres du problème.

$$U_0 = \frac{R^2 \Delta P}{4L\eta}$$

Que représente  $U_0$  ?

6) Déterminer l'expression du débit volumique  $D_v$  en fonction de  $U_0$  puis en fonction de  $\Delta P$ .

On pose :

$$R_{hydro} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

7) Proposer une interprétation physique à  $R_{hydro}$ .



Correction

## Correction

1) L'écoulement est incompressible, donc :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

On en déduit que  $v_z$  ne dépend pas de  $z$ , il ne dépend donc que de  $r$ .

2) L'accélération vaut :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

Or, on est dans le cas d'un écoulement stationnaire :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$  ; et avec la question précédente :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}$ . On a donc bien :  $\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$ .

3) Équation de Navier-Stokes :

$$\rho \vec{a} = -\operatorname{grad}(P) + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

On néglige la pesanteur :  $\rho \vec{g} = \vec{0}$ . On projette sur chaque axe :

$$\begin{cases} (1) & 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} \\ (2) & 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{cases}$$

L'équation (1) assure que la pression ne dépend pas de  $r$  et dépend donc que de  $z$ .

4) L'équation (2) donne :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = K}$$

Le premier terme est une fonction de  $z$  et le second une fonction de  $r$ . Ces deux termes sont donc nécessairement constant.

5) On peut intégrer l'équation portant sur  $z$  entre 0, où la pression vaut  $P_1$ , et  $L$ , où la pression vaut  $P_2$ .

$$dP = K dz \Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} dP = K \int_0^L dz$$

$$\Rightarrow -\Delta P = KL$$

$$\Rightarrow \boxed{K = -\frac{\Delta P}{L} = -\frac{4\eta U_0}{R^2}}$$

On intègre maintenant l'équation portant sur  $r$  :

$$\frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = K \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{Kr}{\eta}$$

$$\Rightarrow r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{Kr^2}{2\eta} + A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{Kr}{2\eta} + \frac{A}{r}$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{Kr^2}{4\eta} + A \ln(r) + B$$

La vitesse ne peut pas diverger en  $r = 0$ , donc  $A = 0$  ; et la vitesse doit s'annuler en  $r = R$  car le fluide est visqueux. Donc :

$$\boxed{v_z(r) = \frac{K}{4\eta} (r^2 - R^2) = U_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)}$$

$U_0$  représente la vitesse maximale du fluide, celle au centre du tuyau.

6) Débit volumique à travers un disque de rayon  $R$ .

$$D_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R U_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \times 2\pi r dr = 2\pi U_0 \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R$$

Ainsi,

$$\boxed{D_v = \frac{\pi R^2 U_0}{2} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}}$$

7) On remarque :

$$R_{hydro} = \frac{\Delta P}{D_v}$$

Il s'agit de la résistance hydraulique. Dans l'analogie hydro-électrique :

$$i \leftrightarrow D_v \quad u = \Delta V \leftrightarrow \Delta P \quad R \leftrightarrow R_{hydro}$$

Il s'agit de la loi d'Ohm transposée à la mécanique des fluides.