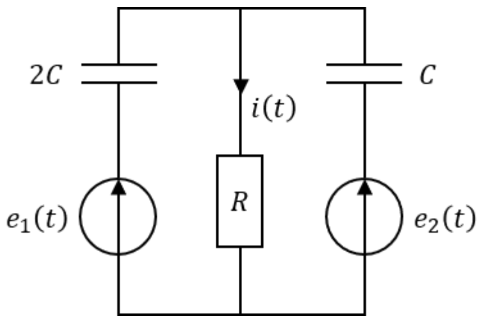
Double circuit RC en régime sinusoïdal

On considère le circuit ci-dessous.



1) Établir l'expression de $\underline{i}$ en fonction de $\underline{e_1}$, $\underline{e_2}$, ω, R et C.

2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par ce circuit et identifier une constante de temps τ.

On donne :

- $e_1(t) = E \cos(\omega t)$;
- $e_2(t) = E \cos(\omega t + 2\pi/3)$;
- $\omega = 1/RC$.

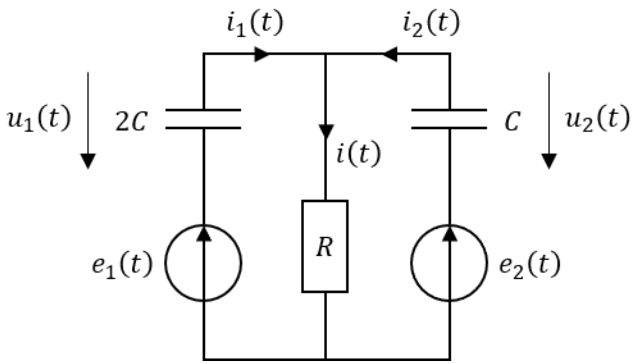
3) Déterminer l'expression de $i(t)$.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Notation :



On applique les lois des nœuds et des mailles que l'on passe en notation complexe.

$$\begin{cases} \underline{i} = \underline{i_1} + \underline{i_2} \\ \underline{e_1} = \underline{u_1} + R\,\underline{i} = \dfrac{\underline{i_1}}{j\omega 2C} + R\,\underline{i} \\ \underline{e_2} = \underline{u_2} + R\,\underline{i} = \dfrac{\underline{i_2}}{j\omega C} + R\,\underline{i} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\underline{i} = j\omega 2C\left(\underline{e_1} - R\,\underline{i}\right) + j\omega C\left(\underline{e_2} - R\,\underline{i}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{i} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega 3RC}\left(2\underline{e_1} + \underline{e_2}\right)}$$

2) On repasse en notation réelle :

$$\left(j\omega + \frac{1}{3RC}\right)\underline{i} = \frac{j\omega}{3R}\left(2\underline{e_1} + \underline{e_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{3RC} = \frac{1}{3R}\left(2\,\frac{de_1}{dt} + \frac{de_2}{dt}\right)}$$

On pose donc :

$$\boxed{\tau = 3RC}$$

3) On repart de l'expression de la Q1.

$$\underline{i} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega 3RC}\left(2\underline{e_1} + \underline{e_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{I_m} = \frac{1}{R}\,\frac{j}{1+3j}\left(2E + E\,e^{j2\pi/3}\right)$$

On en déduit donc :

$$\boxed{i(t) = I_m\,\mathrm{cos}(\omega t + \phi) = \left|\underline{I_m}\right|\ \mathrm{cos}\left(\omega t + \mathrm{arg}\left(\underline{I_m}\right)\right)}$$

Ainsi, on cherche à déterminer le module et l'argument du nombre complexe :

$$\boxed{\underline{I_m} = \frac{E}{2R}\,\frac{-\sqrt{3} + 3j}{1+3j}}$$

On a donc :

$$I_m = \frac{E}{2R}\sqrt{\frac{3+9}{1+9}} = \frac{E}{R}\sqrt{\frac{3}{10}}$$

Et (attention, tous les angles doivent être compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ pour pouvoir appliquer l'arctan) :

$$\phi = \mathrm{arg}\left(j\,\frac{3 + j\sqrt{3}}{1+3j}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arctan}(3) \simeq 48,4\,°}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com