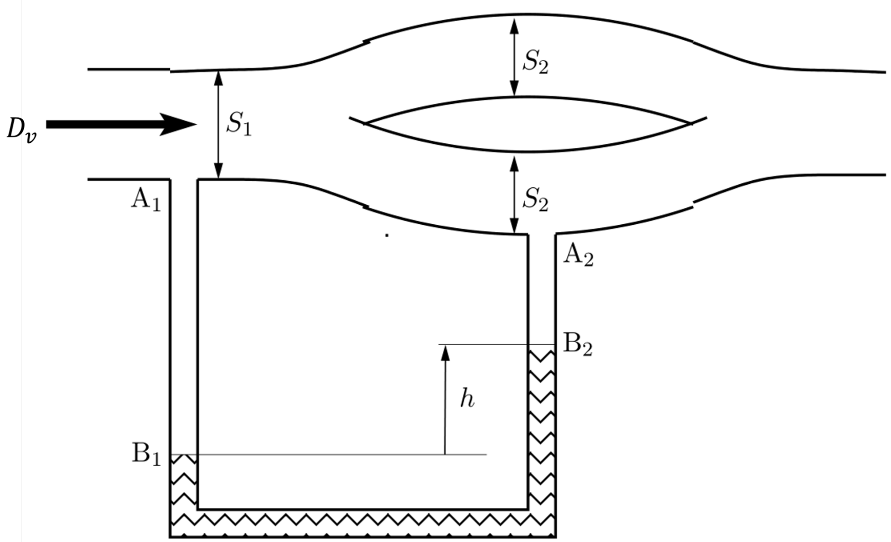
Division d'un écoulement

Un écoulement incident parfait, stationnaire, incompressible et homogène d'un fluide de masse volumique ρ dans une tuyauterie de section S_1 se divise localement dans deux tuyauteries de sections S_2. On suppose que tout l'écoulement s'effectue dans un plan horizontal.

On note $\rho_M > \rho$ la masse volumique du fluide dans le tube en U.



1) Exprimez la hauteur h, comptée positivement vers le haut, en fonction des pressions P_i ($i = 1, 2$) des points A_i et des densités des fluides.

2) En déduire l'expression de h en fonction du débit volumique entrant D_v, des densités des fluides et des sections S_i.

3) La hauteur h peut-elle être nulle ? Si oui dans quelles conditions ?

Correction

Correction

1) On indice par $i = 1, 2$ les grandeurs dans le tuyau de surface S_i. D'après l'énoncé, $z_1 = z_2$.
La hauteur h est donnée par la relation fondamental de la statique des fluides.

$$\left\{\begin{array}{l} P_{B_1} = P_1 + \rho g\, A_1B_1 = P_1 + \rho g \left(A_2B_2 + h\right) \\ P_{B_2} = P_2 + \rho g\, A_2B_2 \\ P_{B_1} = P_{B_2} + \rho_M g\, h \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad P_1 + \rho g h = P_2 + \rho_M g\, h$$

Ainsi,

$$\boxed{h = \frac{P_1 - P_2}{g\left(\rho_M - \rho\right)}}$$

2) On utilise la relation de Bernoulli (écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène) :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Le fluide est incompressible, donc le débit volumique se conserve. On en déduit :

$$D_v = S_1 v_2 = 2 S_2 v_2$$

On rassemble toutes les informations :

$$\boxed{h = \frac{D_v^2}{2g\left(\dfrac{\rho_M}{\rho} - 1\right)}\left(\frac{1}{4S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)}$$

3) La hauteur h peut être nulle si :

$$\frac{1}{4S_2^2} = \frac{1}{S_1^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_1 = 2S_2}$$