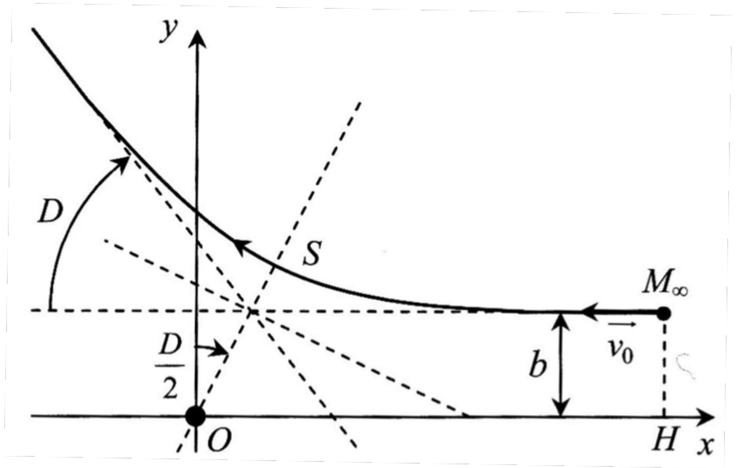
Diffusion de Rutherford

Entre 1909 et 1911, E. Rutherford et ses deux étudiants H. Geiger et E. Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α, dont Rutherford avait précédemment montré qu'il s'agit de noyaux d'hélium. Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées, mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement. En reliant les angles de déviation aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.

Modélisons l'expérience en considérant une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0\overrightarrow{u_x}$ et s'approchant avec un paramètre d'impact b d'un unique noyau cible de numéro atomique Z (donc de charge Ze). Le paramètre d'impact est la distance minimale entre le prolongement de la trajectoire rectiligne de la particule et le noyau situé en O.

Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant situé sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est la branche d'hyperbole représentée ci-dessous.



<u>Données</u> :

- $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1}
- $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C
- $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$ kg
- $Z_{\text{Au}} = 79$
- $v_0 \simeq 3 \cdot 10^7$ m·s^{-1}

1) Exprimer la force subie par la particule α sous la forme $\overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ et exprimer l'énergie potentielle d'interaction.

2) Justifier que l'énergie mécanique de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur à partir des conditions initiales. Justifier que la trajectoire est une branche d'hyperbole.

3) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de la particule en O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires dans le plan (Oxy), montrer que $\overrightarrow{L_O}$ s'exprime de manière simple en fonction de r et $\dot{\theta}$.

4) Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_p^*(r)$$

en explicitant la fonction $\mathcal{E}_p^*(r)$. Comment l'appelle-ton ?

5) On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{min} = OS$ la distance minimale d'approche. Simplifier l'expression de $\mathcal{E}_m$ lorsque $r = r_{min}$. En déduire que :

$$r_{min} = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right)$$

On peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donné par :

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{K}{mbv_0^2}$$

6) Calculer b puis r_{min} pour $D_1 = 60$ ° et $D_2 = 180$ ° (particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Il s'agit d'une interaction électrostatique entre deux particules de charges respectives Ze et $2e$. Ainsi,

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r} \quad \text{avec :} \quad \boxed{K = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}}$$

On en déduit l'énergie potentielle associée :

$$\overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p = \frac{K}{r}}$$

2) La particule n'est soumis qu'à une force conservative, donc l'énergie mécanique se conserve (d'après le TPM). Sa valeur à l'instant initial vaut :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

Puisque $\mathcal{E}_m > 0$, alors la trajectoire est une branche d'hyperbole.

3) La force étant centrale, le moment cinétique se conserve (d'après le TMC). Sa valeur à l'instant initial vaut :

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM_\infty} \wedge m\overrightarrow{v_0} = \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_\infty}\right) \wedge m\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{HM_\infty} \wedge m\overrightarrow{v_0} = \boxed{mbv_0\overrightarrow{u_z}}$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

On en déduit le moment cinétique :

$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}}$$

Donc :

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = bv_0}$$

4) L'énergie mécanique s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right) + \frac{K}{r} = \boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{bv_0}{r}\right)^2 + \frac{K}{r}}_{=\mathcal{E}_p^*(r)}}$$

Il s'agit de l'énergie potentielle effective.

5) Puisque le rayon est minimal en S, alors $\dot{r} = 0$. L'énergie mécanique devient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{bv_0}{r_{min}}\right)^2 + \frac{K}{r_{min}}$$

On multiplie par r_{min}^2/K puis on réarrange les termes :

$$\frac{mv_0^2}{2K}\,r_{min}^2 - r_{min} - \frac{mv_0^2}{2K}\,b^2 = 0$$

On en déduit les solutions :

$$r_{min} = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right)$$

On garde seulement la solution positive :

$$\boxed{r_{min} = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right)}$$

6) On trouve :

$$\begin{cases} D_1 = 60\,° \quad \Rightarrow \quad b = 1,1\cdot 10^{-14}\text{ m} \quad \Rightarrow \quad r_{min} = 1,8\cdot 10^{-14}\text{ m} \\ D_2 = 180\,° \quad \Rightarrow \quad b = 3,7\cdot 10^{-31}\text{ m} \quad \Rightarrow \quad r_{min} = 1,2\cdot 10^{-14}\text{ m} \end{cases}$$

Si la particule α était rentrée en collision avec le noyau d'or, elle n'aurait pas été détectée. Puisqu'elle est détectée, elle n'est pas rentrée en collision, donc le rayon du noyau d'or $< r_{min}$.

Étant donné que la particule est déviée de manière significative (D_1 et D_2) on peut de plus en déduire qu'elle est passée très proche du noyau d'or. Donc $r_{min} \sim$ au rayon du noyau d'or $\sim 10^{-14}$ m.