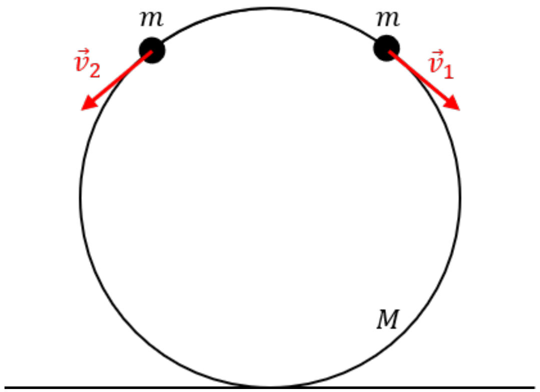
Deux masses sur un anneau

On considère un cerceau de masse M auquel sont accrochés deux points matériels de masse m. Ces derniers sont abandonnés en $t = 0$ au sommet de l'anneau (position quasi-verticale, mais pas rigoureusement à la verticale pour qu'ils se mettent à chuter) et sans vitesse initiale. Le masses m chutent sans frottement, guidées par le cerceau, l'une vers la droite et l'autre vers la gauche.



On considère le cerceau immobile.

1) Appliquer le PFD à la masse m qui chute vers la droite.

2) Intégrer l'équation différentielle du mouvement afin d'en déduire l'expression de la la réaction du cerceau sur la masse.

3) Exprimer la résultante des forces s'appliquant sur le cerceau.

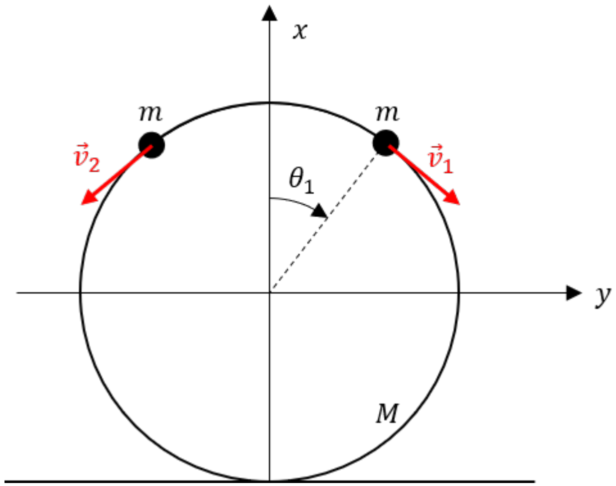
4) Déterminer la condition sur $\eta = m/M$ pour que le cerceau décolle au cours du mouvement des masses m.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) La masse subie sont poids et la réaction du cerceau. On projette ces forces dans la base polaire.



Poids de la masse m :

$$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_x} = mg\left(-\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

Réaction du cerceau :

$$\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{u_r}$$

On rappelle l'accélération en polaire pour une trajectoire circulaire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

Le PFD projeté dans la base polaire donne donc :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\cos(\theta) \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin(\theta) \end{cases}$$

2) On multiplie l'équation du mouvement (la dernière équation) par $\dot{\theta}$.

$$R\dot{\theta}\ddot{\theta} = g\dot{\theta}\sin(\theta) \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}R\dot{\theta}^2\right) = \frac{d}{dt}\Big(-g\cos(\theta)\Big)$$

On intègre cette équation par rapport au temps entre l'instant initial et un instant quelconque.

$$\frac{1}{2}R\Big(\dot{\theta}^2 - 0^2\Big) = -g\Big(\cos(\theta) - 1\Big) \quad\Rightarrow\quad R\dot{\theta}^2 = 2g\Big(1 - \cos(\theta)\Big)$$

On en déduit la réaction du cerceau :

$$\begin{aligned} N &= -2mg\Big(1-\cos(\theta)\Big) + mg\cos(\theta) \\ &= mg\Big(3\cos(\theta) - 2\Big) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{N} = mg\Big(3\cos(\theta)-2\Big)\overrightarrow{u_r} = mg\Big(3\cos(\theta)-2\Big)\Big(\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y}\Big)}$$

3) Le cerceau subit son poids :

$$\overrightarrow{P} = -Mg\overrightarrow{u_x}$$

la réaction du support :

$$\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{u_x}$$

et les deux réactions des masses m. D'après le principe des actions réciproques :

$$\overrightarrow{F}_{m\to M} = -\overrightarrow{F}_{M\to m} = -\overrightarrow{N}$$

Il faut prendre en compte les deux masses. L'étude précédente a été réalisée pour la masse de droite (force notée à présent $\overrightarrow{N_1}$). Par symétrie du problème, on connaît également la force $\overrightarrow{N_2}$ subie par la masse de gauche. Les composantes horizontales des deux forces se compensent, et les composantes verticales sont identiques. On en déduit :

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{N_2} = 2mg\Big(3\cos(\theta)-2\Big)\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x}$$

4) Le PFD sur le cerceau, toujours immobile au sol, donne donc :

$$0 = R - Mg - 2mg\Big(3\cos(\theta)-2\Big)\cos(\theta)$$

Le cerceau décolle lorsque $R = 0$. Il faut donc :

$$0 = M + 2m\Big(3\cos(\theta)-2\Big)\cos(\theta)$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Il s’agit d’un polynôme d’ordre 2 en $X = \cos(\theta)$. En introduisant le paramètre η, il vient :

$$6\eta X^2 - 4\eta X + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 16\eta^2 - 24\eta = 8\eta\,(2\eta - 3)$$

Il existe donc une solution au problème (un X solution, donc un θ de décollage) si le discriminant est positif, donc si :

$$\boxed{\eta \geq \frac{3}{2}}$$

On peut même en déduire l’angle de décollage. Les solutions de l’équation sont :

$$X_\pm = \frac{1}{12\eta}\left(4\eta \pm \sqrt{8\eta\,(2\eta - 3)}\right)$$

Or, le cerceau ne peut décoller que si

$$N = 2mg\Big(3\cos(\theta) - 2\Big)\cos(\theta) < 0 \quad \Rightarrow \quad X = \cos(\theta) \in [0; 2/3]$$

Une résolution graphique montre que X_+ et X_- satisfont deux deux cette condition. L’angle de décollage est donc le premier angle a être atteint, donc le plus petit θ, donc le plus grand X, donc X_+. Ainsi :

$$\theta_d = \arccos\left(\frac{1}{12\eta}\left(4\eta + \sqrt{8\eta\,(2\eta - 3)}\right)\right)$$