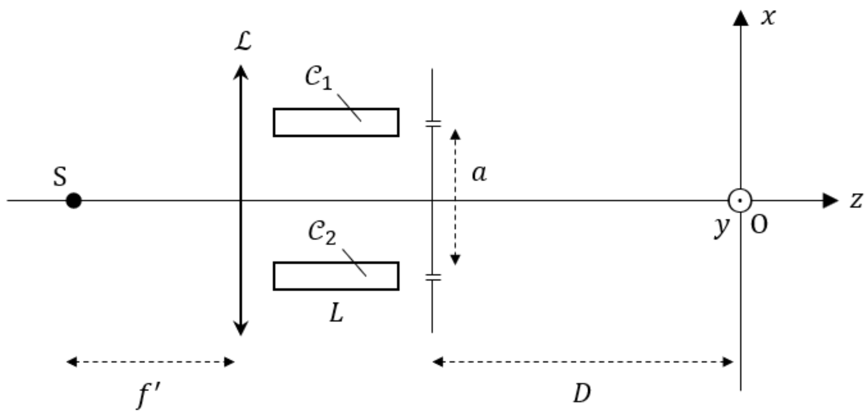
Détecteur interférométrique à concentration

On réalise le montage ci-dessous. La source est monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0. Les rayons lumineux traversent deux cuves transparentes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ identiques. Un écran d'observation est disposé à une distance $D \gg a$ et un détecteur de lumière est positionné en O. Les cuves sont initialement remplies d'air dans les conditions standard de température et de pression. On note n_1 l'indice de l'air dans ces conditions supposées réalisées à l'extérieur des cuves également.



1) Déterminer une expression de l'intensité $I(x)$ observée sur l'écran.

Dans la cuve $\mathcal{C}_2$, on remplace progressivement l'air par du monoxyde de carbone CO d'indice n_2. On note n_2 l'indice optique atteint lorsque le monoxyde de carbone CO a totalement remplacé l'air dans $\mathcal{C}_2$. On constate que lors de ce remplacement les franges se déplacent vers le haut.

2) Quel est le signe de $n_2 - n_1$?

3) Soit n l'indice du mélange {air + CO} en cours de remplissage. Donner l'expression de l'intensité $I(x)$ au cours du remplissage.

On suppose que le plus petit déplacement décelable des franges est égal à $i/10$ (avec i l'interfrange). On admet également que :

$$n = n_1 + (n_2 - n_1)\, f$$

où f est la fraction molaire de CO du mélange.

4) Déterminer quelle la plus petite fraction molaire f_{min} détectable par ce dispositif, en fonction de λ_0, i, L, n_1 et n_2.

Correction

Correction

1) D'après la formule de Fresnel :

$$I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right)$$

Détermination de la différence de marche δ.

$$\delta = (O_2M) - (O_1M)$$

avec :

$$\begin{aligned} O_2M &= \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2} \\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} O_1M &= \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2} \\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right] \end{aligned}$$

Après simplification :

$$\delta = \frac{n_1 a x}{D}$$

Ainsi :

$$\boxed{I(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{n_1 a x}{D}\right)\right)}$$

2) La présence de CO modifie la différence de marche. On a cette fois :

$$\delta = \Big[(O_2M) + n_2 L\Big] - \Big[(O_1M) + n_1 L\Big] = L\,(n_2 - n_1) + \frac{n_1 a x}{D}$$

La nouvelle position de la frange d'ordre 0 est :

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad L\,(n_2-n_1) + \frac{n_1 a x_0}{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{LD\,(n_2-n_1)}{n_1 a}$$

Or d'après l'énoncé, les franges se déplacent vers le haut. L'ordre 0, initialement présente au point O se retrouve donc à une abscisse $x_0 > 0$. On en déduit que

$$\boxed{n_2 - n_1 < 0}$$

3) En remplaçant n_2 par n dans la formule précédente et en utilisant la formule de Fresnel :

$$\boxed{I(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left[L\,(n-n_1) + \frac{n_1 a x}{D}\right]\right)\right)}$$

4) On a :

$$I(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left[L\,(n_2-n_1)\,f + \frac{n_1 a x}{D}\right]\right)\right)$$

L'interfrange vaut :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{n_1 a}$$

Suivons par exemple la position de l'ordre 0 (donc $\delta = 0$). On cherche la fraction f_{min} qui provoque un déplacement de $+i/10$. Ainsi :

$$\delta = 0 = L\,(n_2-n_1)\,f_{min} + \frac{n_1 a \times i/10}{D} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{min} = \frac{\lambda_0 i}{10L\,(n_1-n_2)}}$$