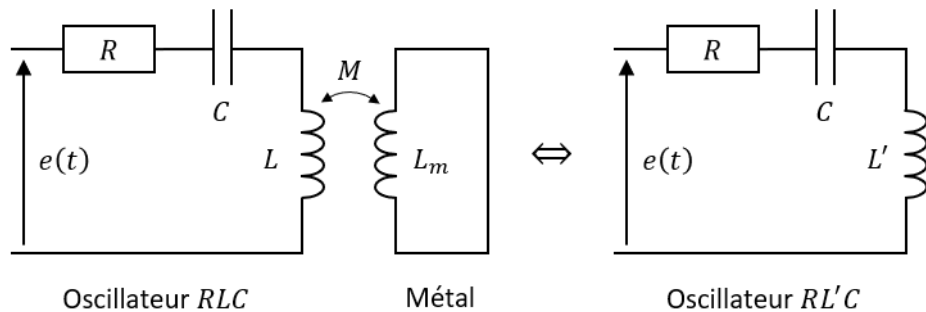


Détecteur de métaux

Un détecteur de métaux utilise deux oscillateurs (des circuits RLC) dont les fréquences d'oscillations sont identiques en l'absence d'objets à détecter.

1) Déterminer l'expression de la fréquence propre f_r du circuit RLC série.

L'un des oscillateurs est tenu loin des objets à détecter et sert de référence. L'autre oscillateur fonctionne comme détecteur de champ magnétique. Lorsqu'un métal est présent dans le champ de la bobine de détection, d'inductance propre L , on admet que le métal détecté se comporte comme une bobine d'inductance propre L_m pure. Le couplage entre les deux inductances est matérialisé par une inductance mutuelle notée M .



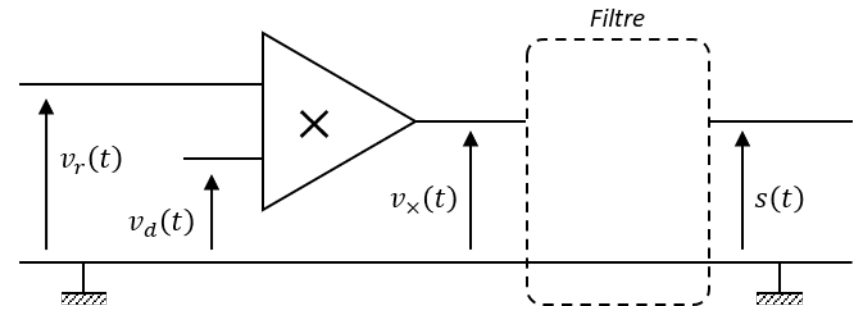
2) Écrire la loi des mailles dans chaque circuit. En déduire alors que l'ensemble {oscillateur RLC + métal d'inductance L' } est équivalent à un {oscillateur $RL'C$ }, où L' est à exprimer en fonction de L , L_m et M .

3) Déterminer la nouvelle fréquence f_d d'oscillation du détecteur lors de la détection d'un métal. Sachant que $M^2 \ll L \times L_m$, déterminer au premier ordre l'expression de $\Delta f = |f_r - f_d|$ en fonction de f_r , L , L_m et M .

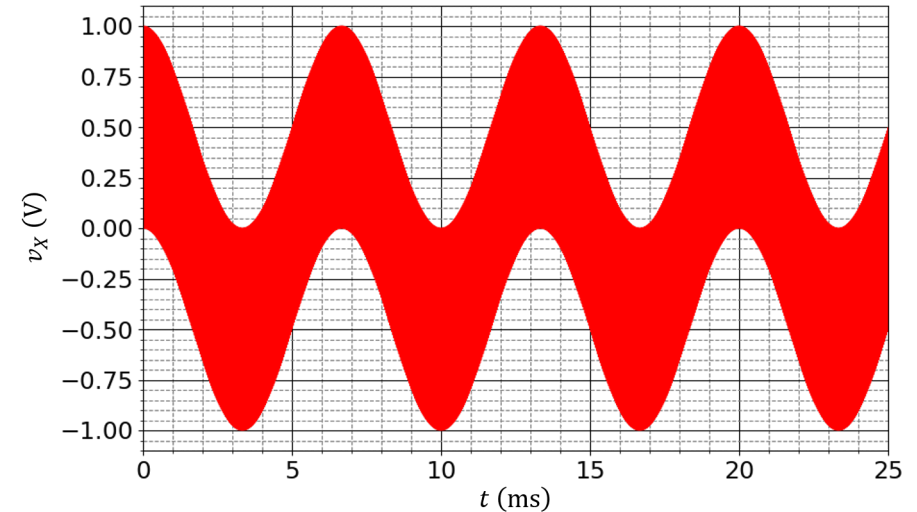
On note respectivement $v_r(t) = v_{r0} \cos(2\pi f_r t)$ et $v_d(t) = v_{d0} \cos(2\pi f_d t)$ les tensions de chacun des oscillateurs respectivement de référence et de détection. Afin de déterminer la variation de fréquence, on utilise le montage de ci-après (cf. au dos de la feuille) comprenant un multiplieur réalisant l'opération $v_x(t) = v_r(t) \times v_d(t)$ et un filtre.

4) Représenter le spectre du signal $v_x(t)$.

5) Sachant que l'on souhaite obtenir en sortie du filtre un signal permettant de déterminer Δf , proposer un filtre simple permettant d'isoler la composante pertinente du signal. Préciser comment choisir sa fréquence de coupure.



6) Lors d'une tentative de détection, le signal $v_x(t)$ ci-dessous a été enregistré en sortie du multiplieur. En déduire l'écart entre les deux fréquences des oscillateurs et prévoir ce qui sera détecté en sortie du fil.



Correction

Correction

1) Loi des mailles dans un RLC série :

$$\begin{aligned} e(t) &= u_R + u_L + u_C \\ &= Ri + L \frac{di}{dt} + u_C \\ &= RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \end{aligned}$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{e(t)}{LC}$$

On identifie alors la pulsation propre :

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

2) Dans chaque circuit, on écrit la loi des mailles. On note i_1 le courant dans l'oscillateur et i_2 dans le métal.

$$\begin{cases} e(t) = u_R + u_C + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = L_m \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad \text{et} \quad e(t) = u_R + u_C + L' \frac{di_1}{dt}$$

Combinons les deux équations de gauche afin de retrouver celle de droite.

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_m} \frac{di_1}{dt} \Rightarrow e(t) = u_R + u_C + \left(L - \frac{M^2}{L_m} \right) \frac{di_1}{dt}$$

On identifie donc :

$$\boxed{L' = L \left(1 - \frac{M^2}{LL_m} \right)}$$

3) La nouvelle fréquence f_d d'oscillation du détecteur vaut :

$$f_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \left(1 - \frac{M^2}{LL_m} \right)^{-1/2} \simeq f_r \left(1 + \frac{M^2}{2LL_m} \right)$$

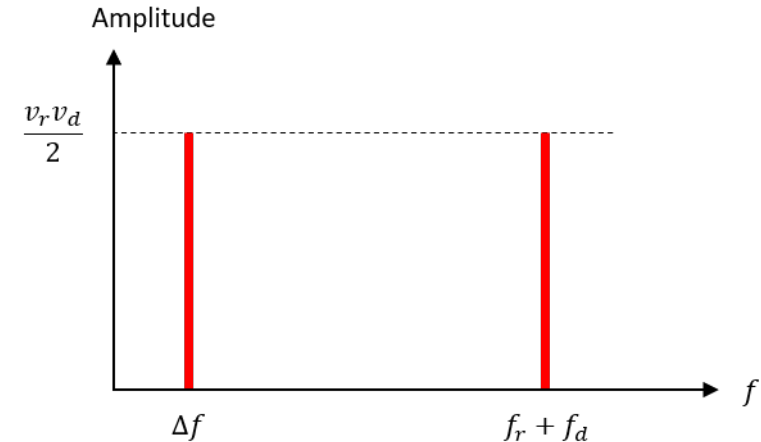
Ainsi,

$$\boxed{\Delta f = f_r \cdot \frac{M^2}{2LL_m}}$$

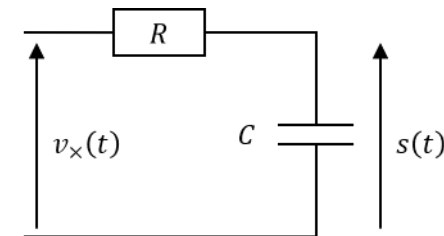
4) En sorti du multiplieur :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{r0} v_{d0} \cos(2\pi f_r t) \cos(2\pi f_d t) \\ &= \frac{v_{r0} v_{d0}}{2} \left[\cos(2\pi \Delta f t) + \cos(2\pi (f_r + f_d) t) \right] \end{aligned}$$

Le spectre de ce signal est :



5) On souhaite conserver la composante basse fréquence. Il faut un filtre passe-bas (par exemple, le RC ci-dessous). Il faut choisir la fréquence de coupure juste au-dessus de Δf de sorte à couper au maximum la composante haute fréquence.



6) L'écart Δf est la fréquence des oscillations lentes visibles sur la figure de l'énoncé. On mesure alors une période de :

$$T = \frac{20 \text{ ms}}{3} = 6,67 \text{ ms} \Rightarrow \boxed{\Delta f = \frac{1}{T} = 150 \text{ Hz}}$$

En sortie du filtre passe-bas, on aura un signal sinusoïdal de fréquence Δf et d'amplitude 0,5 V environ.

