

Décharge d'un condensateur sphérique

On considère un condensateur composé de deux armatures sphériques concentriques de rayon respectif a et b (avec : $a < b$), séparées par un matériau diélectrique de conductivité γ . Le reste de l'espace est assimilé au vide.

À $t = 0$, l'armature intérieure porte la charge Q_0 . On appelle M un point quelconque de l'espace, que l'on repère par ses coordonnées sphériques.

1) Justifier que $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_r$ et que $\vec{B}(M, t) = \vec{0}$.

2) À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer l'équation différentielle vérifiée par \vec{E} dans le condensateur. Faire apparaître une constante de temps τ .

3) Résoudre entièrement cette équation différentielle.

4) Déterminer l'expression de l'intensité du courant $i(t)$.

5) Déterminer l'expression de la capacité C du condensateur.



Correction

1) Par symétrie des conditions initiales, la distribution de charge en fonction du temps conservera la symétrie sphérique qu'elle possède en $t = 0$. Le raisonnement fait en $t = 0$ est donc valable pour tout temps.

La distribution de charge est invariante par rotation selon les angles θ et φ . Donc $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(r, t)$.

Tous les plans contenant M et \vec{u}_r sont des plans de symétrie que la distribution de charge. Donc \vec{E} appartient à l'intersection de ces plans. Donc :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_r$$

La distribution de courant est donnée par : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ dans le condensateur (il n'y a pas de courant dans le vide). La distribution de courant possède donc les mêmes invariances et symétrie que la distribution de charge. Or, seul le vecteur nul peut être orthogonal à tous les plans cités précédemment. Donc :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}$$

2) L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\vec{0} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{E}}{\tau} = \vec{0} \quad \text{avec : } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

3) Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre. La « constante » d'intégration est un vecteur qui peut dépendre de la variable r (car l'ED porte sur le temps).

$$\vec{E} = \vec{A}(r) e^{-t/\tau}$$

Le vecteur $\vec{A}(r) = A(r) \vec{u}_r$ se détermine à l'aide du théorème de Gauss à l'instant $t = 0$. On choisit comme surface de Gauss une sphère passant par M (donc $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$). À $t = 0$, toute la charge se trouve sur l'armature centrale. Ainsi,

$$\iint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{A}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow A(r) = \frac{Q_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Finalement,

$$\vec{E}(M, t) = \frac{Q_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0} e^{-t/\tau} \vec{u}_r$$

4) On intègre \vec{j} sur une sphère de rayon r .

$$i(t) = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint \gamma \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow i(t) = \frac{\gamma Q_0}{\varepsilon_0} e^{-t/\tau}$$

5) Nous allons exploiter la relation $i = C \frac{du}{dt}$. Il faut donc déterminer l'expression de la tension $u(t)$.

Le potentiel électrique V vaut :

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r \Rightarrow V(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi r \varepsilon_0} e^{-t/\tau} + cte$$

La différence de potentiel entre les deux armatures vaut donc :

$$u(t) = V(b, t) - V(a, t) = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) e^{-t/\tau}$$

Ainsi :

$$C = \frac{i}{du/dt} \Rightarrow C = 4\pi \varepsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1}$$

6) **Bonus** : Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule au cours de la décharge.

On intègre sur tout le volume du condensateur et sur toute la durée de l'expérience la puissance volumique $\mathcal{P}_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$.

$$\mathcal{E}_J = \int_{t=0}^{\infty} \int_{r=a}^b \gamma E^2 \cdot 4\pi r^2 dr \cdot dt \Rightarrow \mathcal{E}_J = \frac{Q_0^2}{8\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

On peut également dire que, puisque le condensateur est déchargé à la fin de l'expérience, toute l'énergie initialement stockée est dissipée par effet Joule. Ainsi,

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} C u^2(t=0) = \frac{Q_0^2}{8\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$