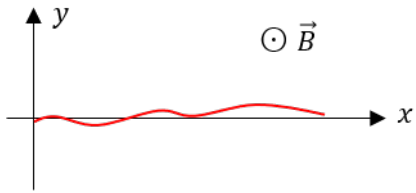


Corde vibrante en présence d'induction

On étudie les petits mouvements dans la direction \vec{u}_y d'une corde métallique de longueur L , fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur et la raideur de la corde.

La corde est parcourue par un courant d'intensité $I = I_0 \cos(\omega t)$ et plongée dans un champ magnétique $\vec{b} = B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{u}_z$. On note T la tension de la corde et μ sa masse linéique.



On rappelle l'expression de la force élémentaire de Laplace, subie par un conducteur de longueur $d\vec{\ell}$, parcouru par un courant i (orienté dans le sens de $d\vec{\ell}$) et placé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} .

$$\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

- 1) Déterminer l'équation différentielle aux dérivées partielles dont est solution le déplacement $y(x, t)$ d'un point de la corde. Introduire une célérité c .
- 2) En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme :

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$$

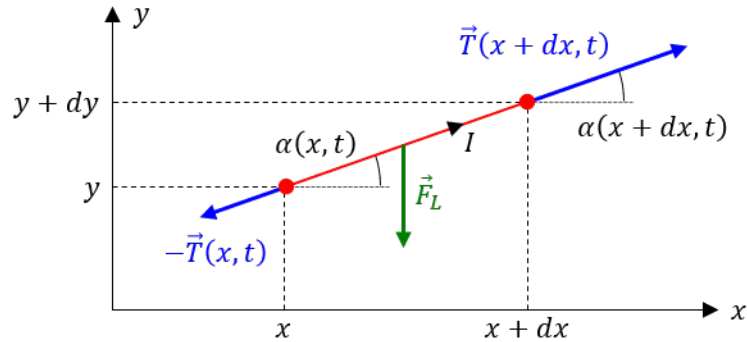
Déterminer A . Que se passe-t-il lorsque $\omega \rightarrow \pi c/L$? Que va-t-il se passer si on réalise l'expérience ?



Correction

1) On suppose que les oscillations sont purement verticale, donc :

$$\vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y$$



Force de Laplace (au premier ordre) :

$$\vec{F}_L = Idx \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z = -IBdx \vec{u}_y = -I_0 B_0 dx \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

PFD sur la corde :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) - I_0 B_0 dx \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

Ainsi,

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} - I_0 B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

De plus, en projetant la tension de la corde sur les deux axes et en faisant un développement limité à l'ordre 1 en α :

$$\vec{T}(x,t) = T(x,t) \left[\cos(\alpha(x,t)) \vec{u}_x + \sin(\alpha(x,t)) \vec{u}_y \right] \simeq T(x,t) \left[\vec{u}_x + \alpha(x,t) \vec{u}_y \right]$$

On projette le PFD sur l'axe (Ox) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\vec{T}(x,t) \cdot \vec{u}_x \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = T_0}$$

La tension de la corde ne dépend pas de x . On projette le PFD sur l'axe (Oy).

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} - I_0 B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$$

Or, toujours à l'ordre 1 :

$$\tan(\alpha) \simeq \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{I_0 B_0}{T_0} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t) \quad \text{avec :} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

2) On injecte la solution dans l'équation différentielle et on simplifie chaque terme par $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$:

$$-A \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + A \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \frac{I_0 B_0}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{I_0 B_0 / \mu}{\omega^2 - (\pi c / L)^2}}$$

Le terme A correspond à l'amplitude d'un point de la corde. Lorsque $\omega \rightarrow \pi c / L$, alors $A \rightarrow \infty$: c'est une résonance (maximum d'amplitude) d'amplitude infinie. C'est absurde pour un modèle de petites oscillations... Dans la pratique, l'amplitude restera finie du fait : de pertes énergétiques non prises en compte dans le modèle, d'effets non linéaires qui émergent lorsque l'amplitude est grande.