

Condensateur en régime variable

Un formulaire est disponible en fin d'exercice.

On s'intéresse à un condensateur cylindrique de rayon a , dont les armatures d'axe commun (Oz) sont distantes de $\ell \ll a$. Le condensateur est placé en série avec une résistance R et un générateur de tension $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$.

1) Le champ électrique, dans l'espace entre les armatures, est supposé égal à $\vec{E}_0 = E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z$. Déterminer le champ magnétique \vec{B}_1 induit dans le condensateur par le champ électrique variable en utilisant le théorème d'Ampère.

2) Le champ magnétique \vec{B}_1 étant variable, il est lui-même source d'un champ électrique \vec{E}_2 . Déterminer \vec{E}_2 en supposant $\vec{E}_2(r=0) = \vec{0}$. En déduire l'expression du champ électrique dans le condensateur sous la forme :

$$\vec{E} = \left[1 - \alpha \left(\frac{r\omega}{c} \right)^2 \right] \vec{E}_0 \quad \text{avec : } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

où α est une constante à déterminer.

On peut continuer ce raisonnement : le champ \vec{E}_2 induit un champ \vec{B}_3 , qui induit un champ \vec{E}_4 , etc. On cherche alors une solution exacte du problème sous la forme :

$$\vec{E}(r, t) = E(r) e^{j\omega t} \vec{u}_z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r\omega}{c} \right)^n e^{j\omega t} \vec{u}_z$$

3) Déterminer $\Delta \vec{E}$ en fonction de \vec{E} .

4) En déduire une relation de récurrence entre les a_n , et trouver alors l'expression du champ électrique dans le condensateur.

Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}(A) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$$



Correction

1) L'étude des symétries et invariances donnent :

$$\vec{B}(M, t) = B_\theta(r, t) \vec{u}_\theta$$

On applique le théorème d'Ampère généralisé sur un cercle centré sur l'axe (Oz) et de rayon $r \in [a, a + \ell]$ (entre les deux armatures). Il n'y a pas de courant entre les armatures, donc $\vec{j} = \vec{0}$. Ainsi :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Or, en orientant le contour dans le sens direct, on a :

$$d\vec{\ell} = dl \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad d\vec{S} = dS \vec{u}_z$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont des constantes pour leur intégrale respective. Ils peuvent donc sortir de l'intégrale et on obtient directement :

$$B_\theta(r, t) \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \pi r^2 \cdot j\omega E_0 e^{j\omega t} \Rightarrow B_\theta(r, t) = \frac{j\mu_0 \varepsilon_0 r \omega E_0}{2} e^{j\omega t}$$

Remarque : on aurait pu utiliser le formulaire du rotationnel pour déterminer \vec{B} , comme on va le faire dans la question suivante pour déterminer \vec{E} .

Ainsi :

$$\vec{B}_1 = \frac{j r \omega E_0}{2 c^2} e^{j\omega t} \vec{u}_\theta$$

2) On utilise Maxwell-Faraday :

$$\text{rot}(\vec{E}_2) = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r \omega^2 E_0}{2} e^{j\omega t} \vec{u}_\theta$$

Puisque \vec{E}_2 ne dépend que de r (invariance selon z et θ) et que d'après ce qui précède son rotationnel est dirigé selon \vec{u}_θ , on en déduit (cf. formulaire du rotationnel) qu'il est dirigé selon \vec{u}_z .

$$-\frac{\partial E_{2,z}}{\partial r} \vec{u}_\theta = \frac{r \omega^2 E_0}{2 c^2} e^{j\omega t} \vec{u}_\theta \Rightarrow E_{2,z} = -\frac{r^2 \omega^2 E_0}{4 c^2} e^{j\omega t}$$

Ainsi,

$$\vec{E}_2 = -\frac{r^2 \omega^2 E_0}{4 c^2} e^{j\omega t} \vec{u}_z = -\frac{1}{4} \left(\frac{r \omega}{c}\right)^2 \vec{E}_0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

3) On a :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

car il n'y a pas de charge ($\rho = 0$) dans le condensateur. De plus,

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E}$$

En égalisant les deux expressions :

$$\Delta \vec{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E}$$

4) Calculons ΔE avec la solution proposée.

$$\begin{aligned} E(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r \omega}{c}\right)^n \\ \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\omega}{c}\right)^n n r^{n-1} \\ \Rightarrow r \frac{\partial E}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\omega}{c}\right)^n n r^n \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{\omega}{c}\right)^n n^2 r^{n-1} \\ \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{\omega}{c}\right)^n n^2 r^{n-2} \end{aligned}$$

L'équation de la question précédente assure que :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n \left(\frac{r \omega}{c}\right)^{n-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r \omega}{c}\right)^n$$

À l'aide d'un changement d'indice des sommes, on obtient :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$$

Avec $a_0 = 1$, on retrouve bien $a_2 = -1/4$, puis on trouverait $a_4 = 1/64$, etc.