

Clepsydre

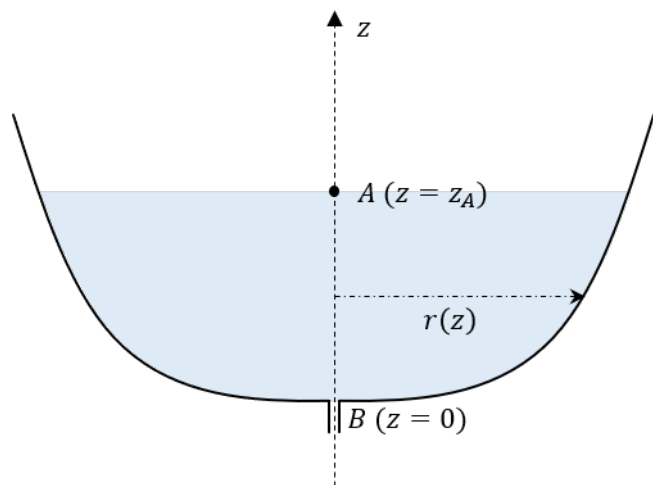
Soit un récipient \mathcal{R} à symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) , où le rayon r à la cote z , comptée à partir de l'orifice B , est donnée par :

$$r(z) = a r^n$$

Au point B , le récipient est percé d'un trou de très faible section S_0 .

Le réservoir est initialement rempli d'eau de masse volumique ρ . La pression atmosphérique P_0 règne au-dessus de la surface libre de l'eau.

Le récipient se vide au cours du temps. L'écoulement est supposé parfait, stationnaire, incompressible et homogène. On suppose que le récipient est toujours suffisamment rempli pour que la surface libre soit toujours très grande devant la surface de vidange (S_0).



- 1) Déterminer la relation liant v_B à z_A , connue sous le nom de formule de Torricelli.
- 2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par z_A . On pourra introduire la constante :

$$K = \frac{S_0 \sqrt{2g}}{\pi a^2}$$

En 2300 avant J.C., les Égyptiens avaient réalisé des récipients appelés clepsydes pour mesurer le temps et pour lesquels la hauteur de la surface libre baisse linéairement dans le temps.

- 3) Quelle doit être pour cela la valeur de n pour faire une clepsydre ? Que vaut alors la vitesse de la surface libre ?



Correction

Correction

1) On utilise la relation de Bernoulli (écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène) :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \underbrace{\rho g z_B}_{=0} + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Or, $P_A = P_B = P_0$. De plus, par conservation du débit volumique (écoulement incompressible) :

$$D_v = v_A S_A = v_B S_B \quad \Rightarrow \quad v_A = \underbrace{\frac{S_B}{S_A}}_{\ll 1} v_B \ll v_B$$

La relation de Bernoulli devient :

$$\rho g z_A \simeq \frac{1}{2} \rho v_B^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{2gz_A}}$$

2) La conservation du débit volumique assure que :

$$v_A S_A = v_B S_B \quad \Rightarrow \quad v_B = \frac{\pi a^2 z^{2n}}{S_0} v_A = - \frac{\pi a^2 z^{2n}}{S_0} \frac{dz_A}{dt}$$

On a bien un signe « - » car les vitesses sont prises positives (prises en norme) mais z_A diminue dans le temps.

On injecte ce résultat dans la formule de Torricelli :

$$- \frac{\pi a^2 z^{2n}}{S_0} \frac{dz_A}{dt} = \sqrt{2gz_A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dz_A}{dt} + K z_A^{1/2-2n} = 0}$$

3) Pour une clepsydre : « la hauteur de la surface libre baisse linéairement dans le temps ». Ainsi :

$$z_A = z_0 - \alpha t \quad \Rightarrow \quad \frac{dz_A}{dt} = -\alpha = cte \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha = K}$$