Circuit de course

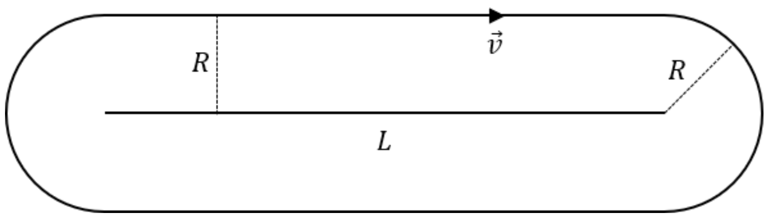
Une considère une course de voiture où les coureurs doivent parcourir un cercle de rayon R de leur choix en un minimum de temps possible. Afin de ne pas déraper, les voitures doivent à tout instant posséder une accélération (en norme) $a \leq a_0$.

Afin de minimiser le temps de course, on supposera donc que les voitures roulent avec une accélération rigoureusement égale à a_0 en norme.

1) Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération. Exprimer a_0 en fonction de R et v (norme du vecteur vitesse).

2) En déduire en temps nécessaire pour faire un tour en fonction de a_0 et R. Conclure : quel rayon faut-il choisir pour gagner la course ?

La piste est maintenant constituée de deux demi-cercles, séparés par deux trajectoires rectilignes de longueur L. On suppose que les coureurs roulent à vitesse constante v (en norme), déterminée à la première question.



3) Déterminer en temps nécessaire pour faire un tour en fonction de a_0, L et R. Conclure : quel rayon faut-il choisir pour gagner la course ?

Correction

Correction

1) On a :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r} + R\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r}$$

Puisque l'accélération est constante en norme, $\dot{\omega} = 0$ donc le mouvement est circulaire uniforme. On pose ainsi :

$$\boxed{a_0 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}}$$

2) Le mouvement étant uniforme :

$$\boxed{T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a_0}}}$$

Plus R est faible, plus T est faible.

3) Le mouvement est toujours uniforme :

$$\boxed{T = \frac{2\pi R + 2L}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{a_0}}\sqrt{R} + \frac{2L}{\sqrt{a_0}}\frac{1}{\sqrt{R}}}$$

Déterminons le rayon qui minimise ce temps.

$$\frac{dT}{dR} = 0 = \frac{2\pi}{\sqrt{a_0}}\frac{R^{-1/2}}{2} - \frac{2L}{\sqrt{a_0}}\frac{R^{-3/2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{L}{\pi}}$$