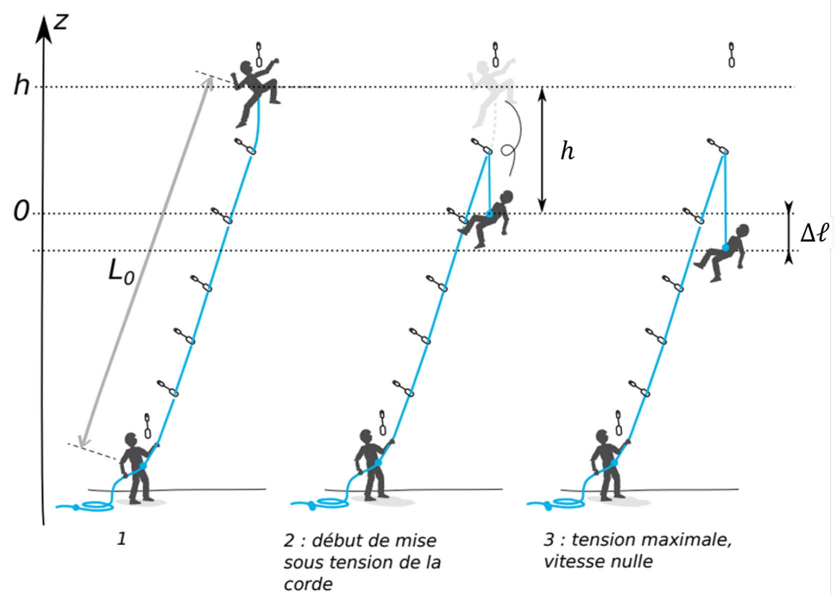
Chute sur corde en escalade

On étudie un grimpeur qui effectue une chute.

Une corde d'escalade de longueur L_0 peut en première approximation être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \alpha/L_0$, avec α une caractéristique de la corde.

Le grimpeur est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. Puis la corde passe sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur $\Delta\ell$. La vitesse du grimpeur devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta\ell$.



On prendra $g = 10$ m·s^{-2}, une corde avec $\alpha = 50$ kN et un grimpeur de masse $m = 100$ kg. Dans tout l'exercice, on pourra supposer que $\Delta\ell \ll h$ afin de simplifier le calcul.

1) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(z)$ du grimpeur au cours de sa chute.

2) À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par le grimpeur.

3) Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal $\Delta\ell$ de la corde.

4) Donner enfin l'expression de la force maximale F_{max} qui s'exerce sur le grimpeur.

Au delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants. Estimer F_{max} pour la plus grande chute imaginable : $h \simeq L_0$. Conclure.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) On distingue les cas où la corde est tendue (énergie potentielle élastique à prendre en compte) ou non (à ne pas prendre en compte).

$$\mathcal{E}_p(z) = \begin{cases} mgz \\ mgz + \dfrac{1}{2}k\left(L - L_0\right)^2 \end{cases} = \begin{cases} mgz & \text{si : } z \geq 0 \\ mgz + \dfrac{1}{2}kz^2 & \text{si : } z \leq 0 \end{cases}$$

2) Par conservation de l'énergie mécanique, l'énergie cinétique et maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale. C'est la cas pour :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dz} = 0 = \begin{cases} mg & \text{si : } z \geq 0 \\ mg + kz & \text{si : } z \leq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = -\frac{mg}{k}}$$

Déterminer donc la vitesse à cette altitude par conservation de l'énergie mécanique.

$$\mathcal{E}_m = cte = mgh = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + mgz + \frac{1}{2}kz^2 \quad \text{avec :} \quad z = -\frac{mg}{k}$$

Ainsi,

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{m^2g^2}{2k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{max} = \sqrt{2gh + \frac{mg^2}{k}}}$$

Avec l'approximation $h \gg \Delta\ell$, la position de vitesse maximale est très proche de $z = 0$, on peut donc faire l'approximation :

$$\boxed{v_{max} \simeq \sqrt{2gh}}$$

3) Par conservation de l'énergie mécanique entre le début de la chute et la fin de la chute, on a :

$$\mathcal{E}_m = cte = mgh = -mg\Delta\ell + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

Avec $h \gg \Delta\ell$, il vient :

$$\boxed{\Delta\ell \simeq \sqrt{\frac{2mgh}{k}}}$$

4) On sait par définition que :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dz}\overrightarrow{u_z}$$

D'après la question 2), cette force est maximale (en norme) lorsque z est minimal, donc lorsque $z = -\Delta\ell$. Ainsi :

$$\boxed{F_{max} = -mg + k\Delta\ell = \sqrt{2mghk} - mg = \sqrt{\frac{2mgh\alpha}{L_0}} - mg}$$

Pour $h = L_0$, on trouve :

$$\boxed{F_{max} = 9\text{ kN}}$$

Le grimpeur ne risque rien !