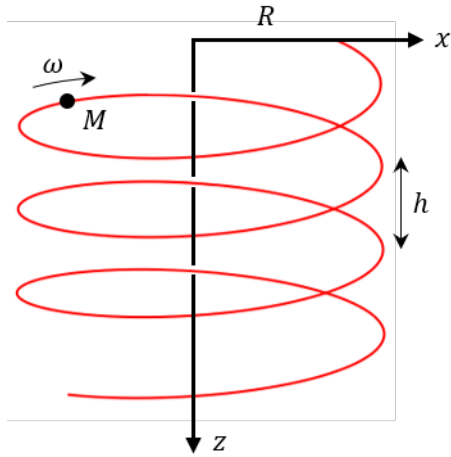
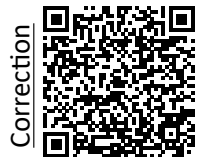


Chute guidée par une piste hélicoïdale

Soit une piste hélicoïdale de rayon R et de pas $h = 2\pi R$ centré sur l'axe (Oz) vertical. On se place en coordonnées cylindriques. Un point M se trouvant initialement en $z = 0$ et $\theta = 0$ avec une vitesse nulle chute sans frottement, guidée par la piste.



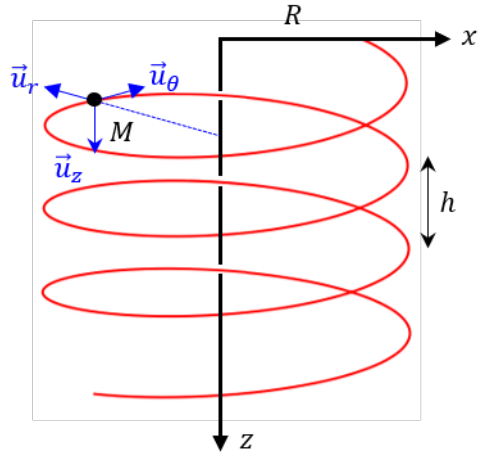
- 1) Reproduire le schéma et indiquer les vecteurs de base au niveau du point M .
- 2) Déterminer la relation entre $z(t)$ et $\theta(t)$.
- 3) Déterminer le vecteur unitaire tangent à la trajectoire. En déduire l'expression de la réaction normale du support.
- 4) Écrire le PFD et le projeter sur les trois axes.
- 5) Résoudre pour les 3 inconnues.
- 6) En déduire la durée nécessaire pour faire n tours ($n \in \mathbb{N}$).



Correction

Correction

1) Schéma :



2) Dans une hélice, z croît linéairement avec θ , donc : $z = a\theta$. Or, quand $z = h = 2\pi R$, $\theta = 2\pi$. Donc :

$$\boxed{z = R\theta}$$

3) Par définition du vecteur unitaire tangent à la trajectoire :

$$\vec{u}_T = \frac{\vec{v}}{v}$$

Or le vecteur vitesse vaut :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= R\vec{u}_r + z\vec{u}_z = R\vec{u}_r + R\theta\vec{u}_z \\ \vec{v} &= R\omega(\vec{u}_\theta + \vec{u}_z) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{u}_T = \frac{\vec{u}_\theta + \vec{u}_z}{\sqrt{2}}}$$

La réaction normale du support possède elle deux composantes (car support à une dimension), toutes deux normales à \vec{u}_T . On peut donc noter :

$$\boxed{\vec{N} = N_1 \vec{u}_r + N_2 (\vec{u}_\theta - \vec{u}_z)}$$

4) Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}(\vec{u}_\theta + \vec{u}_z) - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

PFD sur le point M point le référentielle de l'hélice supposé galiléen.

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = N_1 \\ mR\ddot{\theta} = N_2 \\ mR\ddot{\theta} = -N_2 + mg \end{cases}$$

5) On combine les équations (2) et (3).

$$2mR\ddot{\theta} = mg \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2R} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{gt}{2R} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{gt^2}{4R}}$$

On en déduit ainsi :

$$\boxed{N_1 = -\frac{mg^2t^2}{4R}} \quad \text{et} \quad \boxed{N_2 = \frac{mg}{2}}$$

6) On cherche le temps t_n tel que $\theta = 2\pi n$.

$$2\pi n = \frac{gt_n^2}{4R} \Rightarrow \boxed{t_n = \sqrt{\frac{8\pi nR}{g}}}$$