

Chute d'un arbre

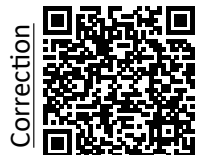
On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'abscisse reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité : $J = \frac{1}{3}mL^2$.

1) Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre à l'aide d'un théorème énergétique.

2) Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ , avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}$$

3) Déterminer l'expression du temps de chute. L'expression fera intervenir une intégrale que l'on ne demande pas de calculer.



Correction

1) Énergie mécanique de l'arbre :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgz_G \quad \text{avec : } z_G = \frac{L}{2} \cos(\theta)$$

On applique le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 = J\omega\dot{\omega} - \frac{mgL}{2} \dot{\theta} \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L} \sin(\theta)}$$

2) Par conservation de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgz_G = \frac{1}{2}J\omega^2(t=0) + mgz_G(t=0)$$

Avec $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\omega(t=0) = 0$, on obtient :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (\cos(\theta_0) - \cos(\theta))$$

On passe à la racine. $\dot{\theta} > 0$ puisque θ va croître au cours de la chute.

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}}$$

3) On a :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos(\theta_0) - \cos(\theta))} \quad \Rightarrow \quad dt = \sqrt{\frac{L}{3g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$$

On intègre pour avoir le temps de chute :

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{L}{3g}} \times \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$$