Chauffage d'un bâtiment

Un bâtiment, de capacité thermique $C = 7,6 \cdot 10^7$ J·K^{-1}, est chauffé à la température uniforme $T_1 = 293$ K par un chauffage central de puissance $\mathcal{P}_0 = 210$ kW constante, la température extérieure étant égale à $T_0 = 263$ K. On suppose que puissance thermique **perdue** par le bâtiment de température T s'écrit :

$$\mathcal{P}_{th} = aC\,(T - T_0) \quad \text{avec :} \quad a = 7,9 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

1) À la date $t = 0$, le chauffage est arrêté. En raisonnant sur un intervalle de temps infinitésimal dt, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.

2) En déduire la température T_2 du bâtiment après $3h$ sans chauffage.

3) La température du bâtiment étant T_2, on remet le chauffage en marche. Exprimer puis calculer la température T_∞ théoriquement atteinte au bout d'une durée très grande.

4) Calculer la durée au bout de laquelle le bâtiment aura retrouvé sa température initiale T_1.

Correction

Correction

1) On applique le premier principe (version enthalpique, car transformation au contact de l'atmosphère donc monobare) infinitésimal sur le bâtiment. Attention, $\mathcal{P}_{th}$ est la puissance thermique perdue, donc $-\mathcal{P}_{th}$ est la puissance thermique reçue (celle qu'il faut mettre dans le premier principe).

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Loi de Joule}}}{=} C\,dT \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PP.}}}{=} -aC\,(T-T_0)\,dt$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + aT = aT_0}$$

2) La solution de l'équation différentielle est :

$$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)\,e^{-at} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_2 = 275{,}8\ \text{K}}$$

3) On applique de nouveau le premier principe en ajoutant le chauffage.

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Loi de Joule}}}{=} C\,dT \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PP.}}}{=} -aC\,(T-T_0)\,dt + \mathcal{P}_0\,dt$$

On en déduit :

$$\frac{dT}{dt} + aT = aT_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{C} = a\underbrace{\left[T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{aC}\right]}_{=T_\infty}$$

Ainsi,

$$\boxed{T_\infty = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{aC} = 298\ \text{K}}$$

4) La solution s'écrit :

$$T(t) = T_2 + (T_\infty - T_2)\,e^{-at}$$

On cherche la durée τ telle que :

$$T_1 = T_2 + (T_\infty - T_2)\,e^{-a\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{T_\infty - T_2}{T_1 - T_2}\right) = 3230\ \text{s} = 54\ \text{min}}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com