Charge ponctuelle dans une armature sphérique

On considère une sphère conductrice de rayon R, reliée à la masse (potentiel nul). On place une charge ponctuelle q dans la sphère à une distance a du centre.

Déterminer le potentiel $V(M)$ à l'intérieur de la sphère.

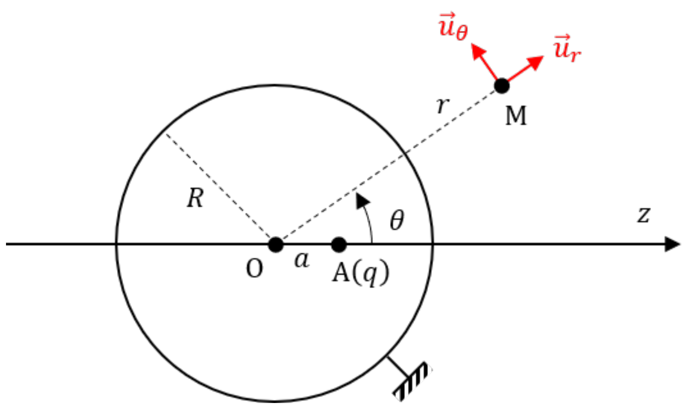
Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

Position du problème

Notons O le centre de la sphère et A la position de la charge ponctuelle. Un point M quelconque est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ). Sans pertes de généralités, il est possible de faire coïncider l'axe (Oz) et l'axe (OA). On note a la distance OA.



Symétries et invariances

Notons $\mathcal{D}$ la distribution de charge {charge ponctuelle + sphère au potentiel nul}. On constate que $\mathcal{D}$ est invariante par rotation autour de (Oz) (angle φ). De plus, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de $\mathcal{D}$. On a donc :

$$\vec{E} = E_r(r,\theta)\,\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta)\,\vec{u}_\theta$$

Nous allons dans cet exercice travailler avec le potentiel électrostatique. Ainsi, le potentiel qu'il faut déterminer est de la forme :

$$V(M) = V(r,\theta)$$

Potentiel d'une charge ponctuelle

Déterminons le potentiel créé par la charge ponctuelle. On rappelle que lorsqu'elle se trouve au centre du repère sphérique :

$$V_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Ainsi, on en déduit :

$$V_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AM}$$

Or,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -a\,\vec{u}_z + r\,\vec{u}_r = (r - a\cos(\theta))\,\vec{u}_r + a\sin(\theta)\,\vec{u}_\theta$$

Donc,

$$AM = \sqrt{(r - a\cos(\theta))^2 + (a\sin(\theta))^2} = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos(\theta)}$$

On en déduit :

$$\boxed{V_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos(\theta)}}}$$

Conditions aux limites

Le potentiel au niveau de la sphère doit être nul. Cette dernière développe donc des charges de surface, qui crées un potentiel V_{sphre} tel que :

$$V_{tot}(R,\theta) = V_q(R,\theta) + V_{sphre}(R,\theta) = 0$$

Distribution équivalente

Montrons que la sphère produit le même champ électrostatique qu'une charge ponctuelle q_0. Par symétrie du problème, cette charge ne peut être placée que sur l'axe (Oz). Pour créer un potentiel nul sur la sphère, on a nécessairement $q_0 < 0$. On note B la position de la charge, et b sa distance à l'origine. D'après ce qui précède, cette charge crée un champ :

$$\boxed{V_{q_0} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos(\theta)}}}$$

Les conditions aux limites imposent donc :

$$0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos(\theta)}} + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos(\theta)}}$$

La sphère est bien équivalente à une charge ponctuelle s'il existe un couple (q_0, b) qui permet de vérifier cette équation $\forall\,\theta$.

Détermination de q_0 et b

On a :

$$0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos(\theta)}} + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow \quad q^2 \cdot \left(R^2 + b^2 - 2Rb\cos(\theta)\right) = q_0^2 \cdot \left(R^2 + a^2 - 2Ra\cos(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2R\left(q_0^2 a - q^2 b\right)\cos(\theta) = q_0^2 \cdot \left(R^2 + a^2\right) - q^2 \cdot \left(R^2 + b^2\right)$$

Cette équation étant vérifiée $\forall\, \theta$, il faut nécessairement que :

$$\left\{\begin{array}{ll} q_0^2 a - q^2 b = 0 & [1] \\ q_0^2 \cdot \left(R^2 + a^2\right) - q^2 \cdot \left(R^2 + b^2\right) = 0 & [2] \end{array}\right.$$

Dans la suite, on pose le paramètre :

$$\eta = \frac{R}{a} > 1$$

On fait le rapport $[2]$ / $[1]$.

$$\frac{R^2 + a^2}{a^2} = \frac{R^2 + b^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad b^2 - ba\left(1 + \eta^2\right) + (a\eta)^2 = 0$$

Les solutions sont :

$$b_\pm = \frac{1}{2}\left(a\left(1 + \eta^2\right) \pm a\left(\eta^2 - 1\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} b_+ = a\eta^2 \\ b_- = a \end{array}\right.}$$

On injecte les solutions dans $[1]$ et on se rappelle que $q_0 < 0$. On obtient :

$$q_0 = -q\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} q_{0,+} = -\eta q \\ q_{0,-} = -q \end{array}\right.}$$

La solution « $-$ » donne lieu à un potentiel nul dans tout l'espace, c'est elle qui donne le potentiel total à l'extérieur de la sphère.

La solution « $+$ » donne lieu à un potentiel non nul dans tout l'espace, c'est elle qui donne le potentiel total à l'intérieur de la sphère.

Bilan

On en déduit donc, après simplification, le potentiel créé à l'intérieur de la sphère :

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\,\cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{ar}{R}\right)^2 + a^2 - 2ra\,\cos(\theta)}}\right)}$$