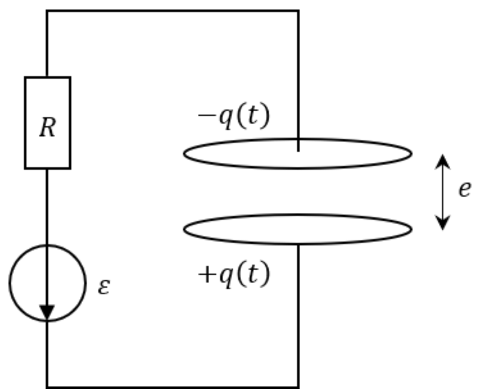
Charge d'un condensateur : bilan énergétique

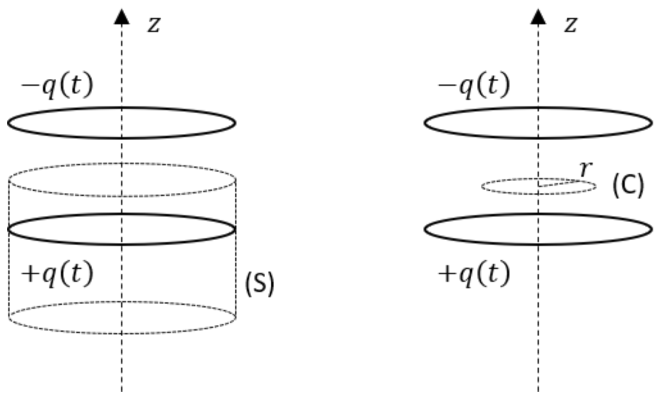
Les armatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs de rayon a, de même axe (Oz) et séparées d'une distance e sont reliées à un générateur de fem ε par une résistance R. Le condensateur est initialement déchargé. À un instant quelconque où la tension à ses bornes vaut $V(t)$, ses armatures portent respectivement les charges $q(t) = C \times V(t)$ et $-q(t)$ où $C = \varepsilon_0 S/e$ est la capacité du condensateur. On néglige les effets de bords afin de pouvoir considérer que le champ électromagnétique est de la forme, en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{E} = E(t)\,\overrightarrow{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B} = B(r,t)\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.



1) En utilisant les lois de l'électrocinétique, déterminer $q(t)$. Déterminer également l'énergie $\mathcal{E}_c$ emmagasinée par le condensateur en fonction de $q(t)$.



2) À un instant quelconque déterminer, entre autres en fonction de $q(t)$, le champ $E(t)$ en utilisant le théorème de Gauss sur la surface (S) représentée en pointillés ci-dessous, ainsi que le champ $B(r,t)$ en appliquant le théorème d'Ampère généralisé au contour (C).

3) Déterminer le vecteur de Poynting puis en déduire la puissance électromagnétique totale $\mathcal{P}$ reçue par l'intérieur du condensateur.

On redonne l'équation locale de Poynting :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \mathrm{div}(\overrightarrow{\pi}) = -\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$$

4) Interpréter les termes de cette équation.

5) Calculer l'énergie électromagnétique U_{em} emmagasinée par le condensateur en fonction de $q(t)$. Conclure.

Correction

Correction

1) Loi des mailles :

$$\varepsilon = Ri + V = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

Le condensateur étant initialement déchargé,

$$\boxed{q(t) = \frac{\varepsilon}{C}\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

La puissance reçue par le condensateur vaut :

$$\mathcal{P}_c = iV = \frac{dq}{dt} \times \frac{q}{C} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

On en déduit l'énergie stockée dans le condensateur :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{q^2}{2C}}$$

2) Avec les indications de l'énoncé : champ uniforme et selon $\overrightarrow{u_z}$ dans le condensateur et nul à l'extérieur (démontrable par l'étude des symétries et invariance, cf. chapitre sur le théorème de Gauss), on a directement :

$$\oiint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(t)\,\pi a^2 = \frac{q(t)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(t) = \frac{q(t)}{\pi a^2 \varepsilon_0}}$$

Le théorème d'Ampère généralisé donne :

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \underbrace{\mu_0 I_{int}}_{=0} + \mu_0\varepsilon_0 \iint \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Il n'y a aucun courant dans le condensateur : $I_{int} = 0$. Ainsi :

$$B(r,t)\,2\pi r = \mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{1}{\pi a^2 \varepsilon_0}\frac{dq}{dt} \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B(r,t) = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2}\frac{dq}{dt}}$$

3) Déterminons le vecteur de Poynting dans le condensateur :

$$\overrightarrow{\pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \boxed{-\frac{r}{2\pi^2 a^4 \varepsilon_0}\, q\frac{dq}{dt}\overrightarrow{u_r}}$$

La puissance électromagnétique totale reçue par l'intérieur du condensateur est égale au flux du vecteur de Poyning entrant dans le condensateur.

$$\mathcal{P} = -\oiint \overrightarrow{\pi} \cdot \overrightarrow{dS} = -\iint \overrightarrow{\pi}(a,t) \cdot \overrightarrow{dS_{lat}} = \frac{1}{2\pi^2 a^3 \varepsilon_0}\, q\frac{dq}{dt} \iint dS_{lat}$$

Ainsi :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi^2 a^3 \varepsilon_0}\, q\frac{dq}{dt} \times 2\pi a e = \frac{e}{\pi a^2 \varepsilon_0}\, q\frac{dq}{dt} = \frac{1}{C}\, q\frac{dq}{dt} = \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right)}$$

4) En multipliant toute l'expression par un volume élémentaire dV on a :

- $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t}\, dV$: variation d'énergie du champ électromagnétique dans dV
- div$(\overrightarrow{\pi})\ dV$: puissance sortante du volume dV
- $-\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}\, dV$: puissance cédée par au champ aux porteurs de charge dans le volume dV

5) Il n'y a pas de porteur de charge dans le condensateur : $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$. Le bilan de puissance sur l'ensemble du volume du condensateur donne donc :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\text{div}(\overrightarrow{\pi}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U_{em}}{\partial t} = -\iiint \text{div}(\overrightarrow{\pi})\ dV = -\oiint \overrightarrow{\pi} \cdot \overrightarrow{dS}$$

D'après la question précédente, on a immédiatement :

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = \frac{q^2}{2C}}$$

On retrouve l'énergie stockée dans un condensateur.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com