

Champ électrostatique dans une cavité

Une boule de centre O et de rayon R contient des charges dont la densité volumique ρ est homogène.

- 1) Déterminer la direction du champ \vec{E} et la variable dont dépend la norme de \vec{E} .
- 2) Calculer en tout point de l'espace le champ $\vec{E}(M)$.

À l'intérieur de la boule se trouve une cavité sphérique creuse de rayon $R' < R$.

- 3) Supposons les deux sphères concentriques. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace sans avoir de nouveau recours au théorème de Gauss.

- 4) On suppose maintenant que le centre des deux sphères est distant de $OO' = a$ et de sorte que la cavité soit toujours entièrement contenue dans la boule de rayon R . Montrer que le champ électrique est uniforme dans la cavité et déterminer son expression.



Correction

1) La distribution de charge est invariante par rotation selon les angles θ et φ . Donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$.

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont deux plans de symétrie de la distribution de charge. Donc \vec{E} appartient à l'intersection de ces deux plans. Donc :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

2) On applique le théorème de Gauss sur une sphère de centre O et de rayon r .

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

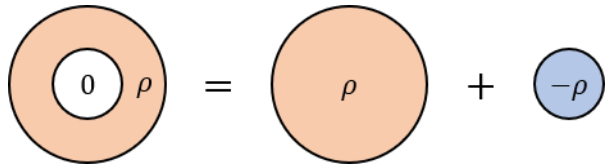
Puisque l'intégrale porte sur les variables θ et φ , le champ $\vec{E}(r)$ est constant et peut sortir de l'intégrale. Ainsi :

$$E(r) \times S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{avec : } S = 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad Q_{int} = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho & \text{si } r \leq R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

On en déduit :

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

3) On peut considérer la cavité creuse comme étant la superposition de la sphère précédente avec une seconde sphère de densité volumique de charge $-\rho$.



D'après le principe de superposition, le champ total est la superposition des champs

créés par chaque sphère. Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r - \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \vec{0} & \text{si } 0 \leq r \leq R' \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r - \frac{\rho R'^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R'^3}{r^2} \right) \vec{u}_r & \text{si } R' \leq r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r - \frac{\rho R'^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (R^3 - R'^3) \vec{u}_r & \text{si } R \leq r \end{cases}$$

4) Remarque : $r \vec{u}_r = \vec{OM}$.

Appliquons de nouveau le principe de superposition, en tenant compte du fait que les centres des sphères ne sont plus confondus :

$$\vec{E}(M \in \text{cavité}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O'M} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OO'}$$

Le champ est uniforme dans la cavité, d'autant plus grand que les centres sont éloignés.