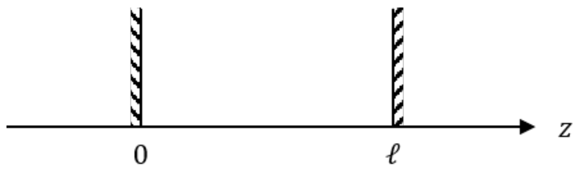
Cavité résonante

On considère deux plans disposés en $z = 0$ et $z = \ell = 30$ cm.



Un champ électromagnétique peut se propager entre ces deux plans. On appelle r le coefficient de réflexion pour le champ électrique avec $-1 < r < 0$. Un dispositif non représenté crée en $z = 0$ à $t = 0$ une onde incidente :

$$\underline{\overrightarrow{E_0}} = E_0\, e^{i(\omega t - kz)}\, \overrightarrow{u_x}$$

On note $\underline{\overrightarrow{E_n}}$ le champ électrique se propageant dans le sens positif, après avoir fait n aller-retours dans la cavité.

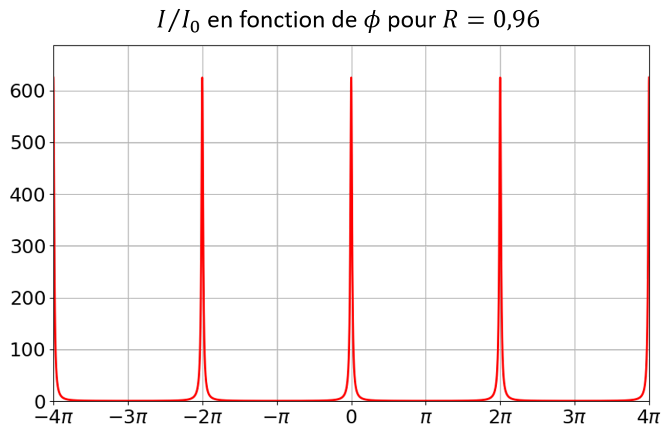
On pose :

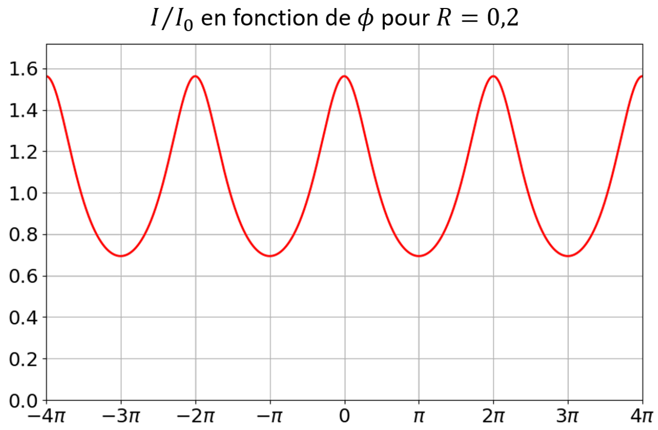
$$\phi = 2k\ell \qquad R = r^2 \qquad I_0 = E_0^2 \qquad \underline{\overrightarrow{E}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\overrightarrow{E_n}}$$

1) Déterminer l'expression de $\underline{\overrightarrow{E_n}}$.

2) Exprimer l'amplitude $\underline{A}$ de $\underline{\overrightarrow{E}}$ à l'aide de E_0, R et ϕ. On pose $I = \underline{A}\,\underline{A}^*$. Exprimer l'intensité I à l'aide de I_0, R et ϕ

3) On représente ci-dessous les courbes I/I_0 pour $R = 0,96$ et pour $R = 0,2$. Calculer le contraste pour les deux courbes.





4) Déterminer pour $R = 0,96$ les fréquences pouvant se propager avec une intensité non négligeable. Quel est l'intérêt du dispositif ?

Correction

Correction

1) La forme générale du champ $\underline{\vec{E}_n}$ est donné par :

$$\underline{\vec{E}_n} = E_n \, e^{i(\omega(t-t_n)-kz)} \, \vec{u}_x$$

Au bout de n aller-retours, l'onde s'est réfléchie $2n$ fois. L'amplitude du champ est donc multipliée par r^{2n} :

$$E_n = r^{2n} \, E_0 = R^n \, E_0$$

Et l'onde à mi un temps $t_n = n \, t_1$ pour faire ces n aller-retours, avec $t_1 = 2\ell/c$. Ainsi,

$$\omega t_n = \frac{2n\ell\omega}{c} = 2nk\ell = n\phi$$

Bilan :

$$\boxed{\underline{\vec{E}_n} = R^n \, E_0 \, e^{i(\omega t - kz - n\phi)} \, \vec{u}_x}$$

2) On a :

$$\underline{\vec{E}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\vec{E}_n} = E_0 \, e^{i(\omega t - kz)} \, \vec{u}_x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[R \, e^{-i\phi}\right]^n = \frac{E_0}{1 - R \, e^{-i\phi}} \, e^{i(\omega t - kz)} \, \vec{u}_x$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{A} = \frac{E_0}{1 - R \, e^{-i\phi}}}$$

On en déduit l'intensité :

$$\boxed{I = \frac{E_0}{1 - R \, e^{-i\phi}} \cdot \frac{E_0}{1 - R \, e^{i\phi}} = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R \cos(\phi)}}$$

3) Par définition du contraste :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Or,

$$I_{max} = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R} = \frac{I_0}{(1-R)^2}$$

et,

$$I_{min} = \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R} = \frac{I_0}{(1+R)^2}$$

Après simplification, on obtient :

$$\boxed{C = \frac{2R}{1 + R^2}}$$

4) Pour avoir une intensité non négligeable, il faut une superposition d'ondes constructives d'où :

$$\phi = 2k\ell = 2p\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_p = p \, \frac{c}{2\ell}}$$

Application numérique :

$$\boxed{f_1 = 500 \text{ MHz}}$$

Si la cavité est très sélective (ie. R proche de 1), alors la cavité permet, à partir d'une bande d'émission large, de créer une série de raies extrêmement fine.