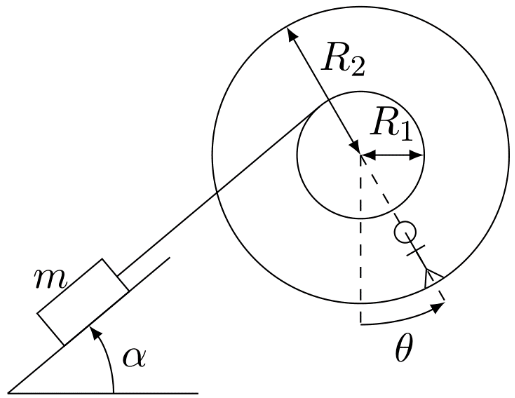
Cage d'écureuil

On considère le système de levage représenté ci-dessous. Pour tracter la masse m à une vitesse v, des hommes se déplacent dans la cage d'écureuil, à un angle θ par rapport à la verticale, pour exercer un bras de levier avec leur propre poids.



<u>Données</u> :

- $R_1 = 40$ cm, $R_2 = 2,0$ m, $m = 500$ kg et $\alpha = 40$ ° ;
- Coefficient de frottement pierre-sol et homme-roue $\mu = 0,9$;
- Masse d'un homme : $m_H = 70$ kg.

Dans un premier temps, on considère que k hommes se déplacent d'un angle θ_{max} correspondant à la limite du glissement.

1) Déterminer l'expression de l'angle θ_{max} correspondant à la limite du glissement d'un homme sur la roue.

2) Établir l'expression de la tension de la corde sur la masse.

3) En déduire le nombre d'hommes k minimal permettant de faire monter la pierre.

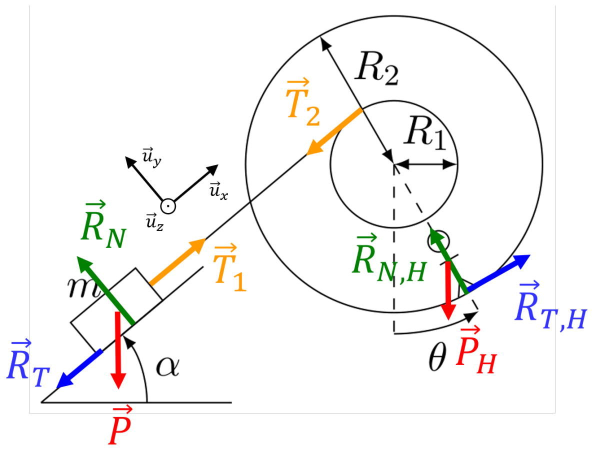
On tient maintenant compte de la puissance musculaire $\mathcal{P}$ d'un homme et on considère que la position angulaire θ des hommes dans la cage vérifie $\theta < \theta_{max}$.

4) Que devient le nombre k minimal de personnes nécessaires pour tirer la masse à la vitesse constante v en fonction de $\mathcal{P}$?

Correction

Correction

1) Notations :



Remarque : la force s'exerçant sur la liaison pivot, nécessaire pour avoir somme des forces nulle sur la roue mais de moment par rapport au centre de la roue nulle, n'est pas représentée sur le schéma car inutile pour le raisonnement.

PFD à l'équilibre un homme :

$$\begin{cases} 0 = R_{T,H} - m_H g \sin(\theta_{max}) \\ 0 = R_{N,H} - m_H g \cos(\theta_{max}) \end{cases}$$

Condition de non glissement sur un homme mais à la limite du glissement :

$$R_{T,H} = \mu R_{N,H}$$

On en déduit :

$$m_H g \sin(\theta_{max}) = \mu m_H g \cos(\theta_{max}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan(\theta_{max}) = \mu = 0.732 \text{ rad} = 42\,°}$$

2) TMC à l'équilibre sur le système { k hommes + roue }, par rapport au centre de la roue et projeté selon z. Attention, il faut faut tenir compte que des forces extérieures ($\vec{R}_{T,H}$ et $\vec{R}_{N,H}$ sont des forces internes).

$$0 = T_2 R_1 - k m_H g R_2 \sin(\theta_{max})$$

PFD sur le fil de masse négligeable :

$$0 = T_1 - T_2$$

On en déduit :

$$\boxed{T_1 = k m_H g \frac{R_2}{R_1} \sin(\theta_{max})}$$

3) Bilan des forces sur la masse m :

$$\begin{cases} \vec{T}_1 = T_1 \vec{u}_x \\ \vec{R}_T = -R_T \vec{u}_x \\ \vec{R}_N = R_N \vec{u}_y \\ \vec{P} = mg\left(-\cos(\alpha)\,\vec{u}_y - \sin(\alpha)\,\vec{u}_x\right) \end{cases}$$

PFD à l'équilibre sur la masse m :

$$\begin{cases} 0 = T_1 - R_T - mg \sin(\alpha) \\ 0 = R_N - mg\cos(\alpha) \end{cases}$$

Condition de non glissement sur la masse mais à la limite du glissement :

$$R_T = \mu R_N \quad \Rightarrow \quad k m_H g \frac{R_2}{R_1} \sin(\theta_{max}) - mg \sin(\alpha) = \mu mg \cos(\alpha)$$

On en déduit :

$$\boxed{k = \frac{mR_1}{m_H R_2} \times \frac{\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\sin(\theta_{max})} = 2,85}$$

Il faut donc $\boxed{k = 3}$ hommes.

4) La liaison pivot de la roue est parfaite : il n'y a aucune perte de puissance dans la roue. Ainsi, toute la puissance ($k\mathcal{P}$) injectée dans le système par les hommes se retrouve dans la tension du câble ($\vec{T}_1 \cdot \vec{v}$) qui tracte la masse m.

PFD à vitesse constante sur la masse m :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{T}_1$$

On multiplie par $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$ pour avoir un bilan de puissance :

$$0 = -mgv \sin(\alpha) + 0 - R_T v + k\mathcal{P}$$

Condition de glissement de la masse m :

$$R_T = \mu R_N = \mu mg \cos(\alpha)$$

Ainsi :

$$\boxed{k = \frac{mgv}{\mathcal{P}}\Big(\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)\Big)}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com