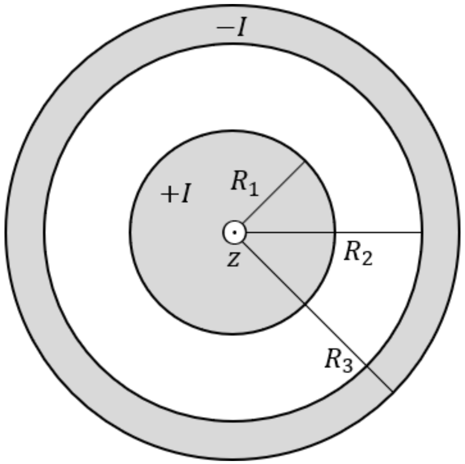
Câble coaxial

On considère un câble coaxial cylindrique d'axe $\overrightarrow{u_z}$, de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1, parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2, de rayon extérieur R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$ et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant conducteur central.



1) Déterminer les densités de courant $\overrightarrow{j}_1$ et $\overrightarrow{j}_2$ respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique en fonction de I et des rayons.

2) Déterminer l'expression du champ magnétostatique en tout point de l'espace.

3) Expliquer l'intérêt du câble coaxial par rapport à un fil simple parcouru par un courant de même intensité.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Dans le conducteur central :

$$I = \overrightarrow{j}_1 \cdot \pi R_1^2 \overrightarrow{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2} \overrightarrow{u}_z}$$

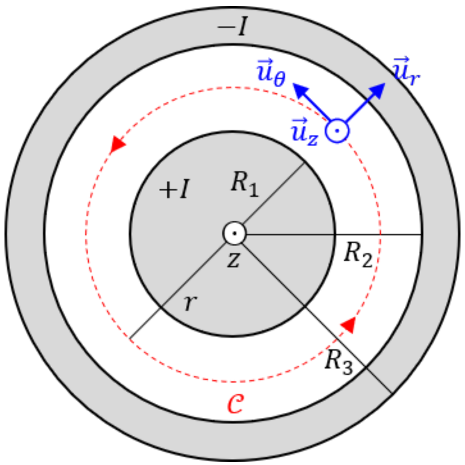
Dans le conducteur périphérique :

$$-I = \overrightarrow{j}_2 \cdot \pi \left(R_3^2 - R_2^2\right) \overrightarrow{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{j}_2 = -\frac{I}{\pi \left(R_3^2 - R_2^2\right)} \overrightarrow{u}_z}$$

2) La distribution de courant est invariante par translation autour de l'axe (Oz) et par rotation autour de l'axe (Oz). Donc $\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{B}(r)$.
Le plan $(M, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc $\overrightarrow{B}$ est orthogonal à ce plan. Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = B(r)\, \overrightarrow{u}_\theta}$$

Schéma :



On applique le théorème de théorème d'Ampère sur un cercle d'axe (Oz), de rayon r, et orienté de sorte que $\overrightarrow{d\ell} = r d\theta \overrightarrow{u}_\theta$.

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 I_{int}$$

Puisque l'intégrale porte sur la variable θ, le champ $\overrightarrow{B}(r)$ est constant et peut sortir de l'intégrale. Ainsi :

$$B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{int} \quad \text{avec :} \quad I_{int} = \begin{cases} j_1 \pi r^2 & \text{si : } 0 \leq r \leq R_1 \\ I & \text{si : } R_1 \leq r \leq R_2 \\ I + j_2 \pi \left(r^2 - R_2^2\right) & \text{si : } R_2 \leq r \leq R_3 \\ 0 & \text{si : } R_3 \leq r \end{cases}$$

En injectant les résultats de la question précédente, on a :

$$\boxed{B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} & \text{si : } 0 \leq r \leq R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si : } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} & \text{si : } R_2 \leq r \leq R_3 \\ 0 & \text{si : } R_3 \leq r \end{cases}}$$

3) L'intérêt du câble coaxial est qu'il ne produit pas de champ magnétique à l'extérieur, contrairement à un fil simple.