Bulle en expansion

On considère au milieu d'un fluide une bulle sphérique en expansion, dont on note le rayon $R(t)$. L'écoulement engendré dans le fluide, supposé parfait et incompressible, est de la forme :

$$\overrightarrow{v}(M,t) = v(r,t)\,\overrightarrow{u_r}$$

en coordonnées sphériques.

1) Montrer que le débit volumique est constant.

2) Déterminer son expression en fonction de r et $v(r,t)$.

3) En égalisant le débit volumique en $r = R$ et un r quelconque, déterminer l'expression de $v(r,t)$ en fonction de R et $\dot{R}$.

4) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide située en M. Vérifier que la condition à la limite $r = R$ est bien respectée.

Correction

Correction

1) La relation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \overrightarrow{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \text{div}(\overrightarrow{v}) = 0$$

Or, fluide incompressible signifie :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div}(\overrightarrow{v}) = 0$$

Puisque $\text{div}(\overrightarrow{v}) = 0$, cela signifie que $\overrightarrow{v}$ est à flux conservatif :

$$\iiint \text{div}(\overrightarrow{v}) \cdot dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \oiint \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

Cette équation traduit le fait que le débit volumique entrant dans un volume doit être égal au volume sortant. Autrement dit, le débit volumique se conserve.

2) Soit une sphère de rayon r. Le débit volumique à travers cette sphère est défini par :

$$D_v = \iint \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint v(r,t)\, \overrightarrow{u}_r \cdot dS \overrightarrow{u}_r = \boxed{v(r,t) \times 4\pi r^2}$$

3) On a donc :

$$D_v = v(r,t) \times 4\pi r^2 = \frac{dR}{dt} \times 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(r,t) = \frac{R^2(t)}{r^2}\, \dot{R}(t)}$$

4) L'accélération est définie par :

$$\overrightarrow{a} = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \overrightarrow{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\, \frac{\partial v}{\partial r}\right) \overrightarrow{u}_r$$

Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \left(\frac{2R\dot{R}^2 + \ddot{R}R^2}{r^2} - \frac{2R^4\dot{R}^2}{r^5}\right) \overrightarrow{u}_r}$$

En $r = R$, on a bien :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(r = R) = \ddot{R}\overrightarrow{u}_r}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com