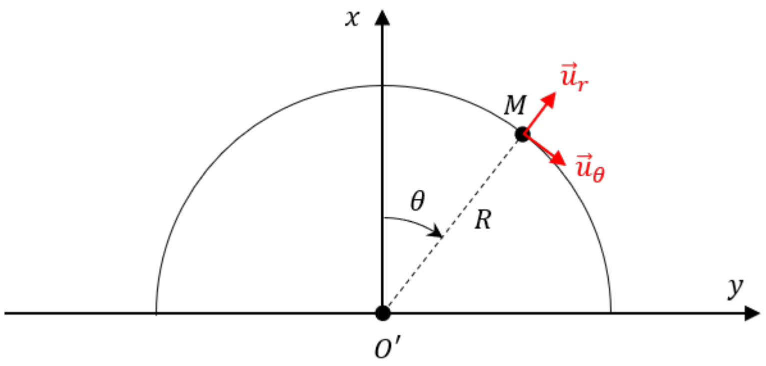
Bille sur une demi-sphère accélérée

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m, en équilibre instable au sommet d'une demi-sphère de rayon R quitte cette position sans vitesse initiale et glisse sans frottement sur la demi-sphère. Cette demi-sphère est soumise à une accélération constante $\overrightarrow{a_0} = a_0\,\overrightarrow{e_y}$ avec $a_0 > 0$. On définit le référentiel $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié au sol et supposé galiléen et le référentiel $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié à la demi-sphère.



1) Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ et faire un bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}'$. Faire un schéma avec ces forces.

2) Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle que vous exprimerez en fonction de m, a_0 et y dans un premier temps puis en fonction de m, a_0, R et θ.

3) Montrer que dans $\mathcal{R}'$ la bille est un système conservatif et en déduire que la vitesse v de la bille dans ce référentiel s'écrit :

$$v = \sqrt{2gR\Big[1 - \cos(\theta)\Big] - 2a_0R\sin(\theta)}$$

4) Déterminer la/les positions d'équilibre θ_e et étudier leur stabilité.

5) Déterminer l'expression de la réaction du support.

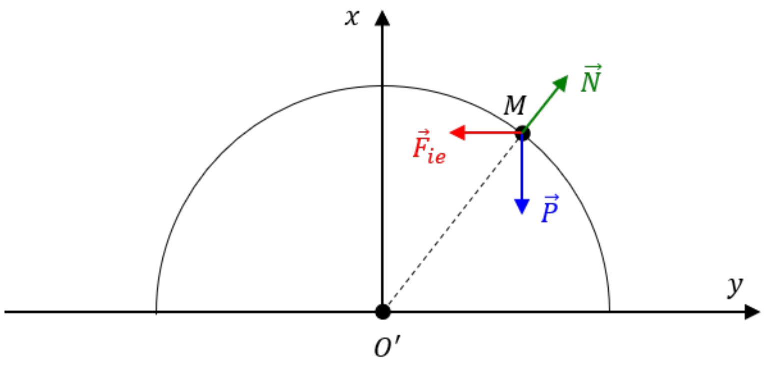
6) En déduire l'équation satisfaite par θ_d, l'angle à partir duquel la bille décolle de la demi-sphère. On ne rechera pas à résoudre cette équation.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) $\mathcal{R}'$ est en translation accéléré dans $\mathcal{R}$.



2) Force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m\,\vec{a}_0 = -ma_0\,\vec{e}_y = -\frac{d}{dy}\Big(ma_0 y\Big)\,\vec{e}_y$$

On en déduit l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement :

$$\boxed{\mathcal{E}_{ie} = ma_0 y = ma_0 R\sin(\theta)}$$

3) La réaction du support $\vec{N}$ ne travaille pas. Le poids $\vec{P}$ et la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ sont conservatives. Donc la bille dans $\mathcal{R}'$ est un système conservatif. On applique le TEM : la différence d'énergie mécanique entre un moment quelconque et le moment initial où la bille est au sommet, sans vitesse, est nulle.

$$\Delta\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\Delta\mathcal{E}_c} + mgR\underbrace{(\cos(\theta)-1)}_{\Delta x} - ma_0\underbrace{R\sin(\theta)}_{\Delta y} = 0$$

On a donc bien :

$$\boxed{v = \sqrt{2gR\Big[1-\cos(\theta)\Big] - 2a_0R\sin(\theta)}}$$

4) L'énergie potentielle vaut :

$$\mathcal{E}_p(\theta) = mgR\cos(\theta) + ma_0R\sin(\theta)$$

On cherche les zéros de sa dérivée première pour trouver les positions d'équilibres.

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = -mgR\sin(\theta_e) + ma_0R\cos(\theta_e) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\tan(\theta_e) = \frac{a_0}{g}}$$

Puisque $\theta \in [-\pi/2\,,+\pi/2]$ et $\tan(\theta_e) > 0$, alors il n'existe qu'une seule position d'équilibre $\theta_e \in [0\,,+\pi/2]$.
Déterminons le signe de la dérivée seconde pour connaître sa stabilité.

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} = -mgR\cos(\theta_e) - ma_0R\sin(\theta_e) < 0$$

Cette position est toujours instable.
5) On rappelle l'accélération sur une trajectoire circulaire.

$$\overrightarrow{O'M} = R\,\vec{u}_r \quad\Rightarrow\quad \vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \quad\Rightarrow\quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$$

On applique le PFD que l'on projette sur chaque axe.

$$\begin{cases} /\vec{u}_r & -mR\dot{\theta}^2 = N - ma_0\sin(\theta) - mg\cos(\theta) \\ /\vec{u}_\theta & -mR\ddot{\theta} = -ma_0\cos(\theta) + mg\sin(\theta) \end{cases}$$

On utilise la projection selon $\vec{u}_r$ et on injecte l'expression de la Q3 avec $v = R\dot{\theta}$. Ainsi :

$$-\frac{m}{R}\Big(2gR\,[1-\cos(\theta)] - 2a_0R\sin(\theta)\Big) = N - ma_0\sin(\theta) - mg\cos(\theta)$$

On en déduit N :

$$\boxed{N = mg\Big[3\cos(\theta) - 2\Big] + 3ma_0\sin(\theta)}$$

6) La bille décolle lorsque $N = 0$ Ainsi :

$$\boxed{\cos(\theta_d) + \frac{a_0}{g}\sin(\theta_d) = \frac{2}{3}}$$