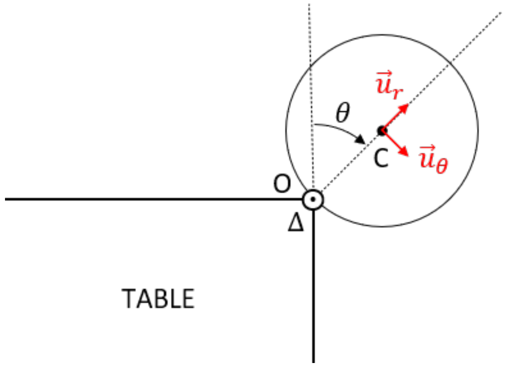
Basculement d'une orange

Une orange, assimilée à une sphère homogène de masse m, de rayon R et de moment d'inertie par rapport à l'axe Δ : $J = \frac{7}{5}mR^2$, est posée tout au bord d'une table dans la position caractérisée par une valeur nulle de l'angle θ avant que sa chute ne s'amorce, selon les notations du schéma suivant :



Les actions de contact entre la table et l'orange sont caractérisées par un coefficient de frottement f.

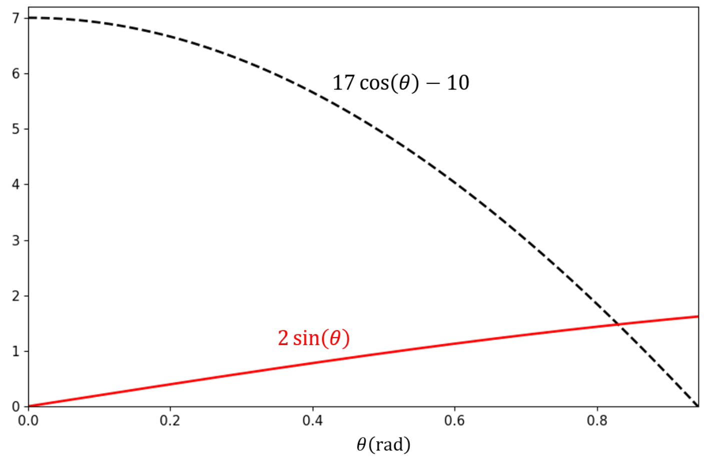
1) On suppose que l'orange bascule sans glisser initialement. Écrire le principe fondamental de la dynamique.

2) Écrire le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ.

3) En déduire $N(\theta)$ et $T(\theta)$, les composantes des réactions du support, respectivement normale et tangentielle.

4) On suppose que l'orange ne glisse pas. Pour quel angle décolle-t-elle ?

5) À l'aide du graphique ci-dessous, dire s'il y a glissement avant décollement.



Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Le PFD s'applique au centre de masse. On rappelle l'accélération du centre de masse pour un mouvement circulaire :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Les forces qui s'appliquent sur le système sont :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P} &= mg\left(-\cos(\theta)\;\overrightarrow{u_r} + \sin(\theta)\;\overrightarrow{u_\theta}\right) \\ \overrightarrow{f} &= N\,\overrightarrow{u_r} - T\,\overrightarrow{u_\theta} \end{aligned}$$

Le PFD donne donc :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} -mR\dot{\theta}^2 &=& -mg\cos(\theta) + N \\ mR\ddot{\theta} &=& mg\sin(\theta) - T \end{array}\right.}$$

2) Seul le poids possède un bras de levier non nul, donc un moment non nul, par rapport à l'axe Δ. Le TMC donne donc :

$$J\ddot{\theta} = mgR\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{5g}{7R}\sin(\theta)}$$

3) On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial et un angle quelconque.

$$\Delta\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgR\Big(\cos(\theta) - 1\Big) = 0$$

On peut également multiplier le TMC par $\dot{\theta}$ puis intégrer entre l'instant initial et un instant quelconque pour obtenir le même résultat.

$$\begin{aligned} & J\ddot{\theta} = mgR\sin(\theta) \\ \Rightarrow\ & J\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgR\dot{\theta}\sin(\theta) = 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgR\cos(\theta)\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & \int_0^t d\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgR\cos(\theta)\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgR\Big(\cos(\theta) - 1\Big) = 0 \end{aligned}$$

Après simplification, il vient :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7R}\left(1 - \cos(\theta)\right)}$$

En injectant dans le PFD, il vient :

$$\boxed{N = \frac{mg}{7} \times \Big(17\cos(\theta) - 10\Big)} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{mg}{7} \times 2\sin(\theta)}$$

4) Le décollement a lieu pour $N = 0$, soit $\boxed{\theta_d = 54\,°}$.

5) On a non glissement tant que : $T < fN$, soit :

$$2\sin(\theta) < f\Big(17\cos(\theta) - 10\Big)$$

Or le décollement a lieu pour $N = 0$, soit :

$$17\cos(\theta) - 10 = 0$$

Donc même en multipliant la courbe $17\cos(\theta) - 10$ par f, elle croisera toujours la courbe $2\sin(\theta)$ avant de s'annuler. Donc il y aura toujours glissement avant le décollement.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com