Balle rebondissante

Dans cet exercice, on s'intéresse au mouvement d'une balle rebondissante de masse m lâchée sans vitesse initiale depuis une certaine hauteur initiale h_0. On néglige tout frottement. On note $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur uniforme.

On lâche la balle à $t = 0$. On note t_0 l'instant du premier impact avec le sol, et v_0 la vitesse juste avant l'impact.

On choisit un axe z vertical, avec une orientation et une origine laissée au choix.

1) En étudiant la première phase du mouvement, où la balle est en chute libre vers le sol, déterminer expression de t_0.

Une fois au sol, la balle rebondit. Le rebond n'étant pas parfaitement élastique, la balle perd une partie de son énergie cinétique. Notons $\mathcal{E}_{c,n}$ l'énergie cinétique juste avant l'impact numéro n et $\mathcal{E}'_{c,n}$ celle juste après cet impact. Ces deux énergies ne sont pas égales, car une partie de l'énergie est perdue lors du rebond. On a donc :

$$\mathcal{E}'_{c,n} = \alpha\, \mathcal{E}_{c,n}$$

avec $\alpha < 1$ le coefficient de restitution.

2) Déterminer par un raisonnement énergétique $\mathcal{E}_{c,0}$, l'énergie cinétique avant le tout premier impact ($n = 0$) ; puis déterminer h_1, la hauteur maximale atteinte par la balle après ce premier rebond.

3) En déduire l'expression de la hauteur maximale h_n atteinte après l'impact numéro n en fonction de h_0, α et de n.

On s'intéresse maintenant à la durée T_n qui s'écoule entre l'impact n et l'impact suivant. Il s'agit de la durée mise pour monter à la hauteur h_n et redescendre au sol, qui donc vaut deux fois la durée mise pour aller de h_n au sol.

4) Déterminer T_n en fonction de t_0, α et n.

On décide enfin d'exploiter une série de mesure de 10 rebonds, comme en TP. Une acquisition vidéo permet de mesurer les T_n en fonction de n.

5) Comment extraire le coefficient de restitution α en exploitant une régression linéaire ?

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

On choisit l'axe z vertical, ascendant et avec origine au sol.

1) Il s'agit d'une chute libre (sans frottement). Un PFD donne :

$$\ddot{z} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -gt \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{gt^2}{2} + h_0$$

La balle touche le sol ($z = 0$) pour :

$$0 = -\frac{gt_0^2}{2} + h_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

2) Par conservation de l'énergie mécanique entre le lâché et le premier impact :

$$\mathcal{E}_{m,0} = cte = 0 + mgh_0 = \mathcal{E}_{c,0} + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{c,0} = mgh_0}$$

Après le rebond, l'énergie cinétique (et donc mécanique, car l'énergie potentielle est nulle au niveau du sol) vaut :

$$\mathcal{E}_{m,1} = \mathcal{E}'_{c,0} = \alpha mgh_0$$

Par conservation de l'énergie mécanique le premier impact et le point le plus haut de la trajectoire :

$$\mathcal{E}_{m,1} = cte = \alpha mgh_0 = 0 + mgh_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_1 = \alpha h_0}$$

3) Le raisonnement précédent marche pour tout rebond. On a donc :

$$h_{n+1} = \alpha h_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_n = \alpha^n h_0}$$

4) D'après la question 1), on connaît le temps de chute t_n pour une hauteur maximale h_n. Il faut doubler ce temps pour avoir l'aller-retour. Donc :

$$T_n = 2t_n = 2\sqrt{\frac{2h_n}{g}} = 2\sqrt{\frac{2\alpha^n h_0}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_n = 2\alpha^{n/2} t_0}$$

5) En prenant le log, on a :

$$\log(T_n) = \log(2t_0) + \frac{n}{2}\log(\alpha)$$

En traçant $\log(T_n)$ en fonction de $n/2$, on obtient une droite affine de pente $\log(\alpha)$.