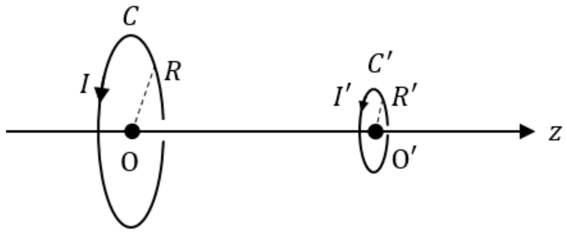
Attraction d'une spire

On considère une spire C fixe circulaire de centre O de rayon R et d'axe vertical Oz, parcourue par un courant d'intensité I. Soit une seconde spire C', mobile, de même axe Oz, de centre O$'$ de rayon $R' \ll R$ est parcourue par un courant I'.

On suppose que R' est suffisamment faible pour que B_z, la composante selon l'axe z du champ magnétique créé par C en tout point de la surface C', soit uniforme. Mathématiquement : soit A un point appartenant au disque de centre O$'$ et de rayon R', alors $B_z(\mathsf{A}) = B_z(\mathsf{O}')$.



1) Donner la forme du champ $\overrightarrow{B}$ créé par C en M, un point quelconque de l'axe Oz.

2) Donner la forme du champ $\overrightarrow{B}$ créé par C en M, un point quelconque de l'espace.

3) Utiliser l'équation de Maxwell-flux pour montrer qu'en A, un point appartenant au disque de centre O$'$ et de rayon R', on a :

$$B_r(\mathsf{A}) = -\frac{r}{2}\,\frac{dB_z(\mathsf{O}')}{dz}$$

4) Retrouver la forme intégrale de l'équation de Maxwell-flux à partir de sa forme locale et en donner une interprétation physique.

5) Montrer que la spire C' tend à se rapprocher de la spire fixe C. Calculer la résultante de la force s'exerçant sur C'.

6) Vérifier que cette force dérive d'une énergie potentielle.

<u>Formulaire</u> : en coordonnées cylindriques

$$\text{div}\left(\overrightarrow{A}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Correction

Correction

1) On a invariance de la distribution de courant par rotation autour de l'axe Oz. Le champ magnétique ne dépend pas de la variable θ.

Soit M, un point quelconque de l'axe Oz. Tout plan passant par O et M est un plan d'anti-symétrie. On en déduit que $\overrightarrow{B}$ appartient à l'intersection de tous ces plans. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\text{M}) = B_z(z)\,\overrightarrow{u_z}}$$

2) On a toujours invariance de la distribution de courant par rotation autour de l'axe Oz. Le champ magnétique ne dépend pas de la variable θ.

Soit M, un point quelconque de l'espace. Le plan $(\text{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan d'anti-symétrie. On en déduit que $\overrightarrow{B}$ appartient à ce plan. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\text{M}) = B_z(r,z)\,\overrightarrow{u_r} + B_z(r,z)\,\overrightarrow{u_z}}$$

On ne peut rien dire de plus.

3) L'équation de Maxwell-flux donne :

$$\text{div}\left(\overrightarrow{B}\right) = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Or, d'après l'énoncé :

$$B_z(\text{A}) = B_z\left(\text{O}'\right) \quad \Rightarrow \quad B_z(r,z) = B_z(z)$$

Donc B_z est une fonction uniquement de z, pas de r. Ainsi,

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rB_r)}{\partial r} + \frac{dB_z}{dz} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\,(rB_r)}{\partial r} = -r\frac{dB_z}{dz}$$

On intègre :

$$rB_r = -\frac{r^2}{2}\frac{dB_z}{dz} + f(z) \quad \Rightarrow \quad B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz} + \frac{f(z)}{r}$$

Or, d'après la première question, $B_r(r=0,z) = 0$. Donc :

$$\boxed{B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz}}$$

4) On a :

$$\text{div}\left(\overrightarrow{B}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint \text{div}\left(\overrightarrow{B}\right)\,dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \oiint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS} = 0$$

Le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers un contour fermé est nul, ie. $\overrightarrow{B}$ est àflux conservatif. Donc il n'existe pas de monopole magnétique.

5) Un élément de longueur $\overrightarrow{d\ell}$ de C' subit la force de Laplace :

$$d\overrightarrow{F} = I'\overrightarrow{d\ell}\wedge\overrightarrow{B} = I'R'd\theta\overrightarrow{u_\theta}\wedge\left(B_z\left(R',z\right)\overrightarrow{u_r} + B_z(z)\,\overrightarrow{u_z}\right)$$

On en déduit :

$$d\overrightarrow{F} = I'R'd\theta\left(-B_z\left(R',z\right)\overrightarrow{u_z} + B_z(z)\,\overrightarrow{u_r}\right)$$

La composante selon $-\overrightarrow{u_z}$ tant à faire rapprocher la spire. Les composantes selon $\overrightarrow{u_r}$ vont s'annuler 2 à 2 (θ et $\theta+\pi$) donc leur résultante est nulle. Ainsi, la force totale subit par la spire vaut :

$$\overrightarrow{F} = \int_0^{2\pi} -I'R'd\theta B_z\left(R',z\right)\overrightarrow{u_z} = -I'R'2\pi B_z\left(R',z\right)\overrightarrow{u_z}$$

Avec la question 3 :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = I'\left(R'\right)^2\pi\frac{dB_z}{dz}\overrightarrow{u_z}}$$

6) On a bien :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{d}{dz}\left(-I'\left(R'\right)^2\pi B_z(z)\right)\overrightarrow{u_z} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dz}\overrightarrow{u_z}$$

<u>Remarque</u> :

$$\mathcal{E}_p = -I'\left(R'\right)^2\pi B_z(z) = -\overrightarrow{\mu'}\cdot\overrightarrow{B} \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{\mu'} = I'\overrightarrow{S'}$$

$\overrightarrow{\mu'}$ le moment magnétique de C'.