Approche énergétique de l'effet de peau

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et dans lequel règne un champ

$$\underline{\overrightarrow{E}}(z,t) = E_0\, e^{-\alpha z}\, e^{i(\omega t - \alpha z)} \overrightarrow{u}_x$$

1) S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?

2) Calculer le champ $\underline{\overrightarrow{B}}(z,t)$ associé.

3) Exprimer la moyenne temporelle $\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle$ du vecteur de Poynting.

4) Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur dz. Déterminer la puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_{J,vol} \rangle$ cédée par unité de volume dans le conducteur.

5) Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.

6) À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Il s'agit bien d'une onde plane, car $\underline{\overrightarrow{E}}$ prend la même valeur en tout point des plans $z = cte$, mais elle n'est pas progressive à cause de l'exponentielle décroissante. Le paramètre α représente à la fois le vecteur d'onde et l'inverse de la longueur d'amortissement (longueur de peau) de l'onde. L'onde est polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_x}$.

2) Pour pouvoir identifier $\overrightarrow{\text{rot}} = -j\underline{\overrightarrow{k}}$, il faut écrire l'onde avec un vecteur d'onde complexe, soit

$$\underline{\overrightarrow{E}}(z,t) = E_0\, e^{i(\omega t - \underline{k}z)}\overrightarrow{u_x} \quad \text{avec :} \quad \underline{k} = \alpha\,(1-i) \quad \text{et} \quad \underline{\overrightarrow{k}} = \underline{k}\,\overrightarrow{u_z}$$

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$-i\underline{\overrightarrow{k}} \wedge \underline{\overrightarrow{E}} = i\omega\underline{\overrightarrow{B}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\overrightarrow{B}}(z,t) = \frac{\underline{k}\,\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega} = \frac{\alpha\,(1-i)}{\omega}\, e^{-\alpha z}\, e^{i(\omega t - \alpha z)}\overrightarrow{u_y}}$$

3) En utilisant les champs complexes,

$$\begin{aligned}
\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}\,\mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}} \wedge \underline{\overrightarrow{B}}^*\right) \\
&= \frac{1}{2\mu_0}\,\mathcal{R}e\left(E_0\, e^{-\alpha z}\, e^{i(\omega t - \alpha z)} \times \frac{\alpha\,(1-i)}{\omega}\, \underline{E_0^*}\, e^{-\alpha z}\, e^{-i(\omega t - \alpha z)}\right)\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} \\
&= \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0\omega}\, e^{-2\alpha z}\overrightarrow{u_z}
\end{aligned}$$

4) Puissance moyenne entrant par la face située en z :

$$\langle\mathcal{P}_e\rangle = \iint \langle\overrightarrow{\Pi}(z)\rangle \cdot ds\,\overrightarrow{u_z} = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0\omega}\, S\, e^{-2\alpha z}$$

Puissance moyenne sortant par la face située en $z + dz$:

$$\langle\mathcal{P}_s\rangle = \iint \langle\overrightarrow{\Pi}(z+dz)\rangle \cdot ds\,\overrightarrow{u_z} = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0\omega}\, S\, e^{-2\alpha(z+dz)}$$

La puissance entrant dans le conducteur mais n'en sortant pas est cédée au conducteur. Ainsi,

$$\langle\mathcal{P}_J\rangle = \langle\mathcal{P}_e\rangle - \langle\mathcal{P}_s\rangle = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0\omega}\, S\left[e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)}\right]$$

Or,

$$e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)} = -\frac{d}{dz}\left(e^{-2\alpha z}\right) \times dz = 2\alpha dz\, e^{-2\alpha z}$$

Ainsi,

$$\boxed{\langle\mathcal{P}_J\rangle = \frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0\omega}\, S dz\, e^{-2\alpha z}}$$

On en déduit la puissance volumique :

$$\boxed{\langle\mathcal{P}_{J,vol}\rangle = \frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0\omega}\, e^{-2\alpha z}}$$

5) La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut :

$$\boxed{\langle\mathcal{P}_{J,vol}\rangle = \frac{1}{2}\, e^{-2\alpha z}\,\mathcal{R}e\left(\gamma\underline{\overrightarrow{E}} \cdot \underline{\overrightarrow{E}}^*\right) = \frac{\gamma E_0^2}{2}\, e^{-2\alpha z}}$$

6) Par identification,

$$\frac{\alpha^2}{\mu_0\omega} = \frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}}$$