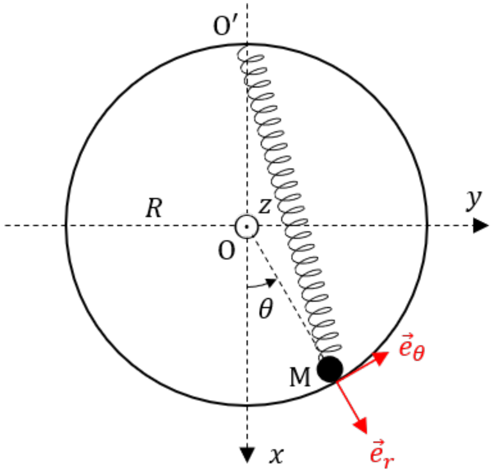
## Anneau avec ressort

Un point matériel de masse $m$, repéré par le point $M$ est libre de glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon $R$ et de centre $O$ dans le champ de pesanteur terrestre. Le point $M$ est accroché à l'extrémité d'un ressort de longueur $\ell$, de constante de raideur $k$ et de longueur à vide nulle.




1) Montrer que :

$$\ell^2 = 2R^2\,(1 + \cos(\theta))$$

2) Donner l'expression du moment cinétique de $M$ par rapport à $O$.

3) Calculer les moments des forces s'exerçant sur $M$, en fonction de la seule variable $\theta$.

4) Par application du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta$.

5) Où se trouvent les positions d'équilibre ? Sont-elles stables ?

Correction

# Correction

1) On a :

$$\begin{aligned}\ell^2 &= \left(\overrightarrow{O'M}\right)^2 = \left(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM}\right)^2 \\ &= R^2+R^2+2\,\overrightarrow{O'O}\cdot\overrightarrow{OM} \\ &= R^2+R^2+2R^2\cos(\theta) \\ &= 2R^2\left(1+\cos(\theta)\right)\end{aligned}$$

2) La trajectoire est circulaire :

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=R\,\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{v}=R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}\end{cases}$$

On en déduit le moment cinétique :

$$\boxed{\overrightarrow{L_O}=\overrightarrow{OM}\wedge m\,\overrightarrow{v}=mR^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}$$

3) Réaction normale du support :

$$\overrightarrow{N}=N\,\overrightarrow{u_r}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\mathcal{M}_O\left(\overrightarrow{N}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{N}=\overrightarrow{0}}$$

Poids :

$$\overrightarrow{P}=mg\left(\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r}-\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\mathcal{M}_O\left(\overrightarrow{P}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{P}=-Rmg\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_z}}$$

Ressort :

$$\overrightarrow{F}=-k\ell\,\overrightarrow{u}_{O'M}=-k\,\overrightarrow{O'M}=-kR\left(-\overrightarrow{u_x}+\overrightarrow{u_r}\right)$$

avec : $\overrightarrow{u_x}=\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r}+\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\mathcal{M}_O\left(\overrightarrow{F}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F}=kR^2\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_z}}$$

4) On applique le TMC que l'on projette sur $\overrightarrow{u_z}$ :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}=\sum\mathcal{M}_O\quad\Rightarrow\quad mR^2\ddot{\theta}=-Rmg\sin(\theta)+kR^2\sin(\theta)$$

Après simplifications :

$$\boxed{\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{R}-\frac{k}{m}\right)\sin(\theta)=0}$$

5) Les positions d'équilibre ($\ddot{\theta}$) se trouvent en $\sin(\theta)=0$, donc $\boxed{\theta=0}$ et $\boxed{\theta=\pi}$. Leur stabilité dépend du signe de la parenthèse. Si $\dfrac{g}{R}-\dfrac{k}{m}>0$, on reconnaît l'équation d'un pendule simple donc $\theta=0$ est stable et $\theta=\pi$ instable. Pour $\dfrac{g}{R}-\dfrac{k}{m}<0$, c'est l'inverse.


Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com