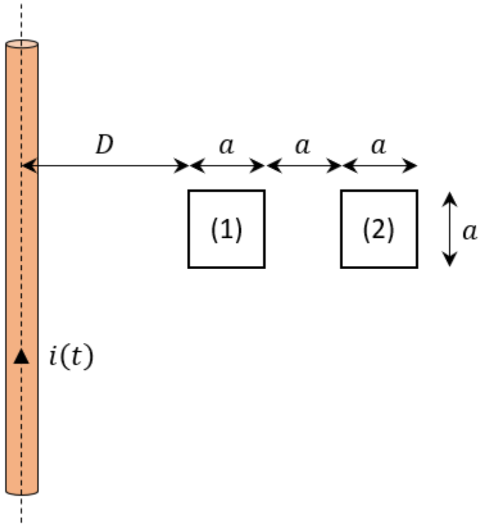
Ampèremètre RMS à induction

Un câble est parcouru par un courant alternatif $i(t)$ sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz. Un appareil de mesure contient 2 bobines (1) et (2), de même résistance $R = 1\ \Omega$ contenant chacune $N = 100$ spires carrées de côté $a = 2,0$ cm supposées quasiment confondues (on parle de « bobine plate »).

Chacune de ces bobines, mise en court-circuit, est équipée d'un capteur ampèremétrique mesurant les intensités efficaces $i_{1,eff}$ et $i_{2,eff}$ des courants dans (1) et (2).



Vous introduirez au cours de l'exercice toutes les grandeurs qui vous semblent pertinentes et vous proposerez, si besoin, des ordres de grandeurs pour les applications numériques.

1) Expliquer pourquoi on observe des courants dans (1) et (2).

2) Les capteurs relèvent $i_{1,eff} = 1,92$ mA et $i_{2,eff} = 1,83$ mA et on suppose que $D \gg a$. Faire certaines hypothèses que l'on vérifiera dans la question suivante afin d'en déduire l'intensité efficace i_{eff} du courant dans le câble.

3) Discuter les hypothèses de travail.

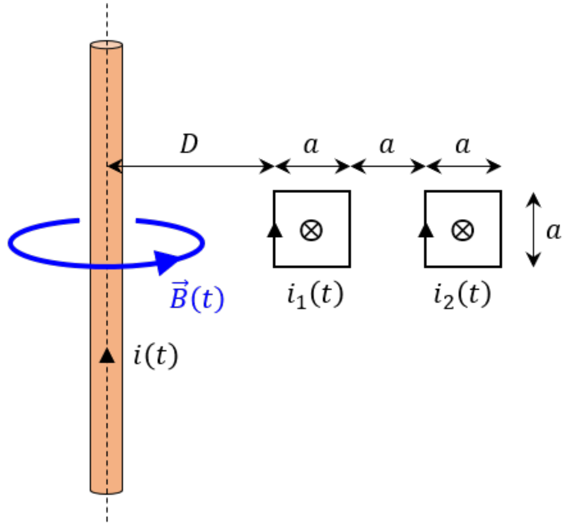
4) Quel est l'avantage de ce dispositif par rapport à un ampèremètre branché directement sur le câble ? par rapport à une pince ampèremétrique (petite bobine torique munie d'un ampèremètre, qu'on place autour du câble) ?

Correction

Correction

1) Explication : i varie dans le temps, donc $\overrightarrow{B}$ varie, donc le flux de $\overrightarrow{B}$ dans (1) et (2) varie, donc une fem apparaît, ce qui crée un courant dans (1) et (2).

2) On oriente les circuits.



On suppose le fil infini. Il génère un champ magnétique (utiliser le théorème d'Ampère) :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$$

Calculons le flux de $\overrightarrow{B}$ dans (1). L'élément de surface, avec le sens de passage du courant choisi, vaut : $\overrightarrow{dS} = drdz\,\overrightarrow{e_\theta}$. Ainsi :

$$\phi_1 = N\iint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{N\mu_0 i}{2\pi}\int_0^a dz\int_D^{D+a}\frac{dr}{r} = \frac{N\mu_0 ia}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{D}\right) \simeq \frac{N\mu_0 ia^2}{2\pi D}$$

On a supposé dans la dernière étape que $D \gg a$. De même pour (2) :

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{N\mu_0 i}{2\pi}\int_0^a dz\int_{D+2a}^{D+3a}\frac{dr}{r} &&= \frac{N\mu_0 ia}{2\pi}\ln\left(\frac{D+3a}{D+2a}\right)\\
&= \frac{N\mu_0 ia}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{D+2a}\right) &&\simeq \frac{N\mu_0 ia^2}{2\pi}\frac{1}{D+2a}\\
&= \frac{N\mu_0 ia^2}{2\pi D}\left(1+\frac{2a}{D}\right)^{-1} &&\simeq \frac{N\mu_0 ia^2}{2\pi D}\left(1-\frac{2a}{D}\right)
\end{aligned}$$

On note L l'inductance propre d'une bobine et M le coefficient d'induction mutuelle. La loi de Faraday + la loi des mailles donnent :

$$\begin{cases} e_1 = -\dfrac{\phi_{tot,1}}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\Big(\phi_1 + Li_1 + Mi_2\Big) = Ri_1 \\ e_2 = -\dfrac{\phi_{tot,2}}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\Big(\phi_2 + Li_2 + Mi_1\Big) = Ri_2 \end{cases}$$

On passe en complexe (signaux périodiques) :

$$\begin{cases} \dfrac{N\mu_0\omega a^2}{2\pi D}\,\underline{i} + L\omega\,\underline{i_1} + M\omega\,\underline{i_2} = -R\,\underline{i_1} \\ \dfrac{N\mu_0\omega a^2}{2\pi D}\left(1-\dfrac{2a}{D}\right)\underline{i} + L\omega\,\underline{i_2} + M\omega\,\underline{i_1} = -R\,\underline{i_2} \end{cases}$$

On néglige l'induction propre et l'induction mutuelle devant les effets résistifs.

$$\begin{cases} \dfrac{N\mu_0 fa^2}{D}\,\underline{i} \simeq -R\,\underline{i_1} \\ \dfrac{N\mu_0 fa^2}{D}\left(1-\dfrac{2a}{D}\right)\underline{i} \simeq -R\,\underline{i_2} \end{cases}$$

On passe en grandeur efficace :

$$\begin{cases} [1] \quad \dfrac{N\mu_0 fa^2}{D}\,i_{eff} \simeq R\,i_{1,eff} \\ [2] \quad \dfrac{N\mu_0 fa^2}{D}\left(1-\dfrac{2a}{D}\right)i_{eff} \simeq R\,i_{2,eff} \end{cases}$$

On a deux équations et deux inconnues (i_{eff} et D). On peut résoudre le système. L'équation $[1]$ donne :

$$\boxed{D = \frac{N\mu_0 fa^2}{R\,i_{1,eff}}\,i_{eff}}$$

Puis, $[1]-[2]$ donne :

$$R\left(i_{1,eff} - i_{2,eff}\right) = \frac{2N\mu_0 fa^3}{D^2}\,i_{eff} = \frac{2R^2\,i_{1,eff}^2}{N\mu_0 fa\,i_{eff}}$$

On en déduit :

$$\boxed{i_{eff} = \frac{2R\,i_{1,eff}^2}{N\mu_0 fa\left(i_{1,eff} - i_{2,eff}\right)} = 652\text{ A}}$$

3) Revenons sur l'ensemble des hypothèses.

À l'aide de la forme précédente, on peut estimer $D \simeq 85$ cm $\gg a$. Cette hypothèse est validée.

Par analyse dimensionnelle, on peut estimer l'inductance propre d'une spire carrée : $L_{1\text{ spire}} \sim \mu_0 a$. Chacune des N spires crée un flux dans les N spires de la bobine, on en déduit alors que l'inductance propre d'une bobine est proportionnelle à N^2. Ainsi :

$$L \sim N^2 \mu_0 a = 2,5 \cdot 10^{-4}\ \text{H}$$

Ainsi, $\omega L \sim 8 \cdot 10^{-2}\ \Omega \ll R$. On peut bien négliger l'inductance propre devant le terme résistif.

Enfin, si le couplage était parfait entre les deux bobines, on aurait $M = L$. Même dans ce cas, l'inductance mutuelle serait négligeable (au vu des valeurs des intensités, on peut considérer que $i_{1,eff} \simeq i_{2,eff}$ pour le raisonnement) devant le terme résistif, d'après ce qui précède. De plus, il est clair que seule une faible partie des lignes de champ d'une bobine passe par l'autre bobine. On a donc en réalité $M \ll L$, ce qui permet de complètement négliger ce terme.

Toutes les hypothèses sont validées.

4) On n'a pas à ouvrir le circuit pour brancher un ampèremètre et on n'a pas à s'approcher trop près du câble dans lequel passe un fort courant.